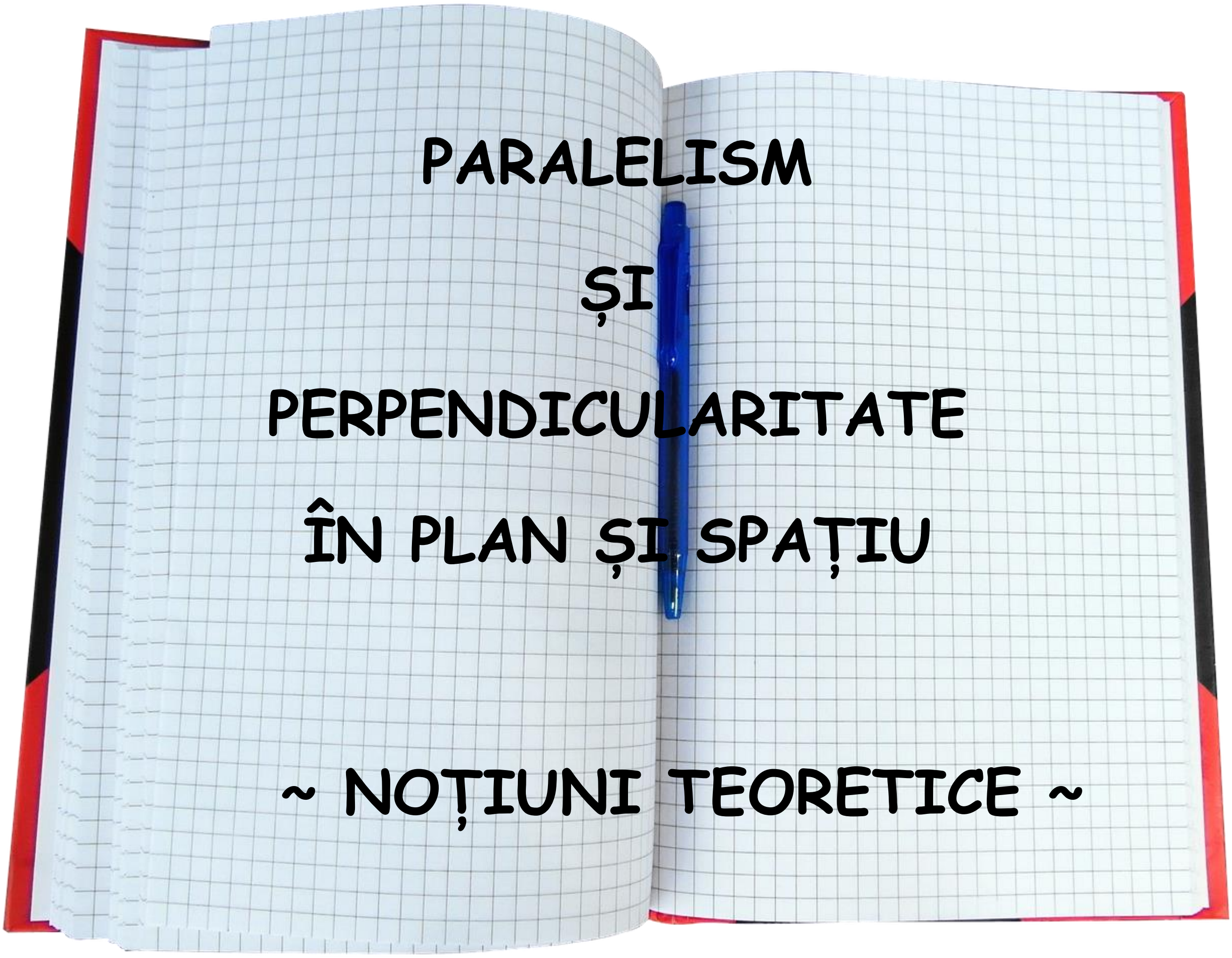
Raluca Mariana COZMA



PARALELISM

ȘI

PERPENDICULARITATE

ÎN PLAN ȘI SPAȚIU

~ NOȚIUNI TEORETICE ~

Auxiliar pentru gimnaziu

PARALELISM ŞI PERPENDICULARITATE ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU-NOŢIUI TEORETICE

§ RELAŢII DE PARALELISM

1. DREPTE PARALELE ÎN PLAN

Definiţie

Două drepte *a* şi *b* se numesc **paralele** dacă ele aparţin aceluiaşi plan şi nu au niciun punct comun sau coincid.

Dacă *a* este paralelă cu *b* notăm $a \parallel b$ şi cu $a \nparallel b$ negaţia sa.

Definiţie

Dacă *d*, *d'* şi *s* sunt trei drepte în acelaşi plan, iar si intersectează pe *d* şi *d'* în două puncte diferite *A* şi respectiv *B*, atunci *s* este o secantă pentru *d* şi *d'*.

Dacă două drepte *d* şi *d'* sunt intersectate de o secantă *s* în punctele *A* şi *B*, în aceste puncte unghiurile formate se vor grupa câte două şi se vor numi:

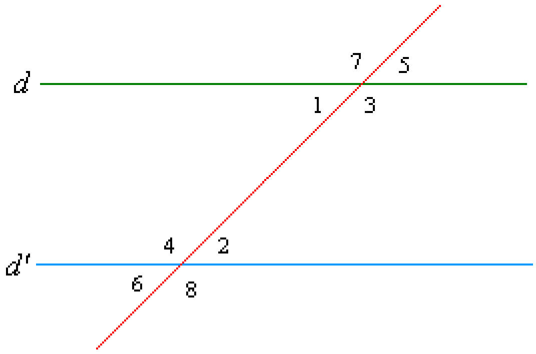


Fig. 1

- alterne interne (∢1, ∢2); (∢3 , ∢4);
- alterne externe (∢5, ∢6); (∢7, ∢8);
- corespondente (∢1, ∢6); (∢3, ∢8); (∢2, ∢5); (∢4, ∢7).

Teorema 1.1.

Fie date două drepte paralele şi o secantă. Dacă o pereche de unghiuri alterne interne sunt congruente, atunci dreptele sunt paralele.

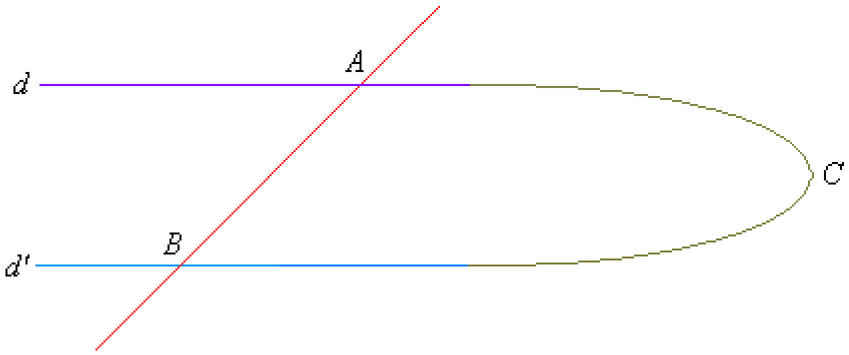


Fig. 2

Demonstraţie

Presupunem că dreptele *d* şi *d'* diferite nu sunt paralele $\Rightarrow$ au un punct comun *C*. Fie *A* şi *B* punctele de intersecţie ale dreptelor *d* şi respectiv *d'* cu secanta *s*, atunci există un unghi exterior triunghiului *ABC* congruent cu un unghi interior neadiacent, deci este contrazisă teorema unghiului exterior. Cum dreptele au fost presupuse diferite rămâne să fie doar paralele.

Consecinţă

Două drepte perpendiculare pe a treia sunt paralele între ele.

În Capitolul 1 s-a arătat exitenţa şi unicitatea paralelei dintr-un punct exterior la o dreaptă. În continuare, voi arăta ce proprietăţi derivă din relaţia de paralelism a dreptelor.

Teorema 1.2

Fie date două drepte şi o secantă. Dacă dreptele sunt paralele, atunci fiecare pereche de unghiuri alterne interne sunt congruente.

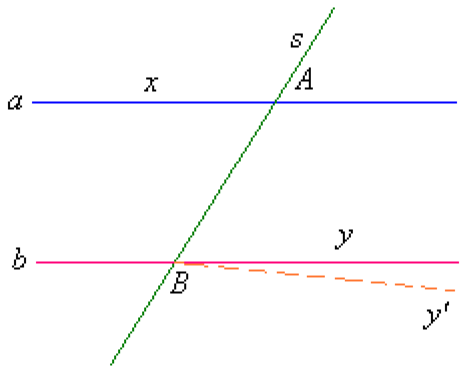


Fig. 3

Demonstraţie

Fie dreptele *a* şi *b* încât şi presupunem că unghiurile alterne interne cu secanta *s* nu sunt congruente, adică ∢xAb≠∢Aby $\Rightarrow$ există o semidreaptă $[By'$ încât ∢xAB≡∢Aby’. Înseamnă, conform teoremei de existenţă, că prin *B* s-au dus două paralele la *a*, ceea ce este absurd absurd.

Consecinţă

Dacă două drepte sunt paralele, atunci fiecare pereche de unghiuri alterne externe (corespondente) sunt congruente.

Teorema 1.3

Într-un triunghi suma măsurilor unghiurilor este 180^0.

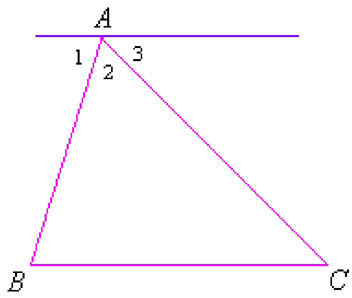


Fig. 4

Demonstraţie

Fie triunghiul *ABC*, prin *A* se duce o paralelă la *[BC]* rezultă pe secantele *AB* şi respectiv *AC* că $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle ABC$, respectiv $\sphericalangle A_3 \equiv \sphericalangle ACB$. Cum suma unghiurilor din *A* este 180^0

$\Rightarrow m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle ACB) + m(\sphericalangle BAC) = 180^0$.

Definiţie

Se numeşte paralelogram patrulaterul convex care are laturile paralele două câte două.

Teorema 1.4

Într-un paralelogramlaturile paralele sunt congruente.

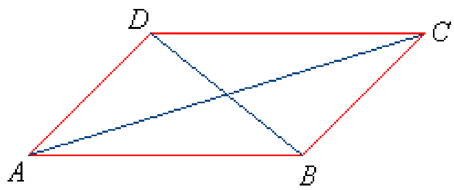


Fig. 5

Demonstraţie

Fie paralelogramul *ABCD*, atunci avem datorită teoremei 1.2 că $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ACB$ şi că $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle CAB$ (unghiuri alterne interne formate de laturile paralele cu diagonala *[AC]*. Din cele două relaţii stabilite şi *AC* latură comună triunghiurile *ADC* şi *CBA* sunt congruente (cazul *ULU*), rezultă din aceasta că $[AD] \equiv [CB]$ şi $[AB] \equiv [DC]$.

Consecinţa 1

Unghiurile opuse într-un paralelogram sunt congruente.

Consecinţa 2

Într-un paralelogram diagonalele au acelaşi mijloc.

Reciprocele teoremelor sunt:

Teorema 1.6

Dacă un patrulater convex are două laturi opuse paralele şi congruente, atunci este paralelogram.

Teorema 1.7

Dacă un patrulater convex are laturile opuse congruente două câte două, atunci este paralelogram.

Teorema 1.8

Dacă un patrulater convex are unghiurile opuse congruente, atunci este paralelogram.

Teorema 1.9

Dacă într-un patrulater convex diagonalele se intersectează una pe alta în părţi congruente, atunci patrulaterul este paralelogram.

Teorema 1.10

Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente dacă sunt ambele ascuţite sau ambele obtuze şi sunt suplementare dacă unul este ascuţit, iar celălat obtuz.

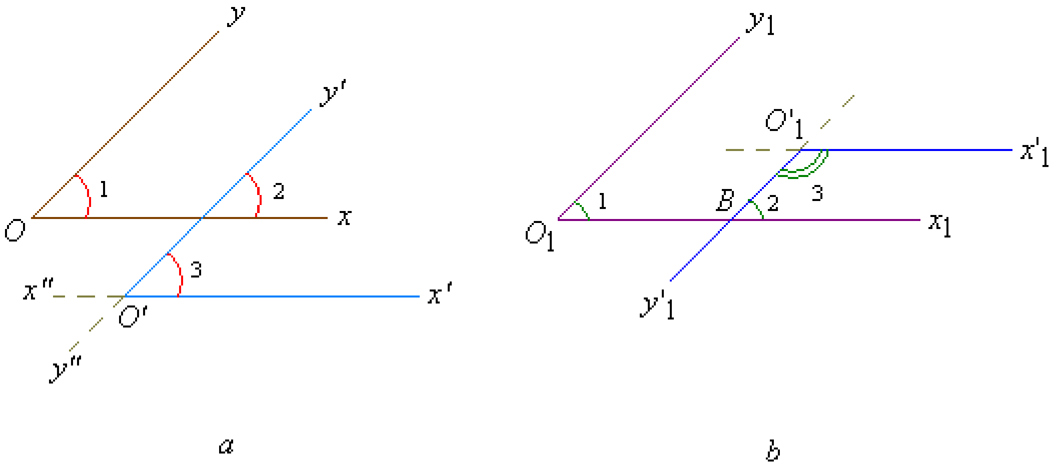


Fig. 6

Demonstraţie

În primul caz, când ambele unghiuri sunt, de exemplu, ascuţite, fie ∢xOy şi ∢x'O'y' două unghiuri astfel încât [Ox||[O'x' şi [Oy||[O'y'. Notând $[Ox \cap [O'y' = \{A\}$.

Din [Oy||[O'y' intersectate de $[Ox \Rightarrow$ ∢xOy ≡ ∢xAy' (ca unghiuri corespondente) (1)

Din [Ox || [O'x' intersectate de [O'y'=> ∢xOy'≡∢x'O'y' (tot ca unghiuri corespondente) (2)

Din (1) şi (2) şi proprietăţii de tranzitivitate a relaţiei de congruenţă $\Rightarrow$∢xOy ≡ ∢x'O'y'

Teorema este adevărată şi pentru unghiul $x"O'y"$ care este opus la vârf cu unghiul x'O'y"=> ∢xOy ≡ ∢x'O'y'.

În al doilea caz, când un unghi este ascuţit şi celălalt obtuz, fie ∢x_1 O_1 y_1 (m∢$x_1O_1y_1$ <90°) şi ∢x_1'O_1'y_1' (m∢ x_1'O_1'y_1' >90°) două unghiuri astfel încât [O_1x_1 || [O_1'y_1' şi [O_1y_1 || [O_1'y_1'.

Notând $[O_1x_1 \cap [O_1'y_1' = \{B\}$, din [$O_1y_1$ || [O_1'y_1' intersectate de $[O_1x_1 \Rightarrow$∢x_1Oy_1 ≡ ∢x_1BO_1' (ca unghiuri corespondente), apoi din [O_1x_1 || [O_1'x_1' intersectate de [O_1'y_1'$\Rightarrow$ *m(∢x_1BO_1') + m(∢x_1'O1' y_1') = 180^0* (unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei).

Cum ∢$x_1O_1y_1$ ≡ ∢x_1BO_1' $\Rightarrow$ *m(∢$x_1O_1y_1$) + m(∢x_1'O1' y_1') = 180^0*.

Definiţie

Într-un triunghi, segmentul ale cărui extremităţi sunt mijloacele a două laturi se numeşte **linie mijlocie a triunghiului.**

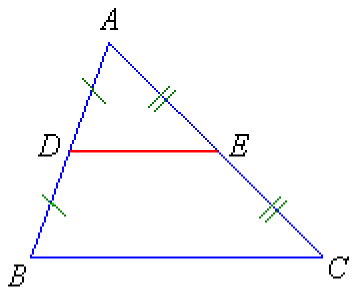


Fig. 7

De exemplu, considerând ΔABC şi mijloacele *D* şi *E* ale laturilor $[AB]$ şi $[AC]$ putem spune că $[DE]$ este o linie mijlocie şi putem scrie $[AD]=[DB]$ şi $[AE]=[EC]$.

Teorema 1.11

Într-un triunghi segmentul care uneşte mijloacele a două laturi (linia mijlocie) este paralel cu cea de-a treia latură şi jumătate din lungimea acesteia.

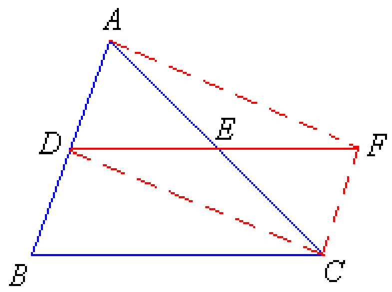


Fig. 8

Demonstrație

Fie ABC un triunghi și $[DE]$ linie mijlocie. Facem o construcție ajutătoare. Pe dreapta DE luăm un punct F astfel încât $[DE] \equiv [EF]$ și unim pe A cu F și pe D cu C.

În patrulaterul $ADCF$ diagonalele $[AC]$ și $[DF]$ au proprietățile: $[AE] \equiv [EC]$ (din ipoteză) și $[DE] \equiv [EF]$ (din construcția făcută).

Conform teoremei „Dacă într-un patrulater convex diagonalele au același mijloc, atunci patrulaterul este paralelogram” $\Rightarrow$ $ADCF$ paralelogram $\Rightarrow AD \parallel FC$ și $[AD] \equiv [FC]$. Cum AD este una și aceeași dreaptă cu DB și $[AD] \equiv [BD]$ (din ipoteză), putem scrie $DB \parallel FC$ și $[DB] \equiv [FC] \Rightarrow DBCF$ este paralelogram conform teoremei „Dacă într-un patrulater convex două laturi opuse sunt paralele și congruente, atunci patrulaterul este paralelogram”.

Prin urmare, $DE \parallel BC$ (laturile opuse într-un paralelogram sunt paralele) și $DE = \frac{1}{2} \cdot BC$ (laturile opuse într-un paralelogram sunt congruente, $[DF] \equiv [BC]$), iar $DE = \frac{1}{2} \cdot DF$ (din construcție).

Observație

Într-un triunghi există trei linii mijlocii.

Teorema 1.12 (reciproca)

Într-un triunghi ABC, paralela prin mijlocul D al laturii $[AB]$ la latura $[BC]$ conține mijlocul E al laturii $[AC]$ și avem $DE = \frac{1}{2} \cdot BC$.

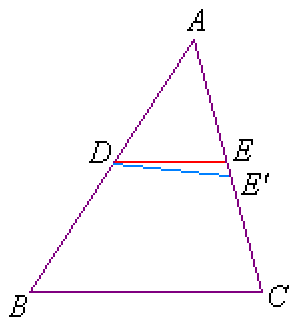


Fig. 9

Demonstraţie

Demonstrăm mai întâi că $[AE]\equiv[EC]$ folosind metoda “reducerii la absurd”.

Presupunem că E nu ar fi mijlocul laturii $[AC]$, adică $[AE]\neq[EC]$. În acest caz ar exista un alt punct *E’* care să fie mijlocul laturii $[AC]$ ($[AE']\equiv[E'C]$). Atunci, ar însemna că segmentul $[DE']$ ar fi linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow$ [DE] || [BC’].

Dar, cum din ipoteză ştim că [DE] || [BC] $\Rightarrow$ prin punctul *D* ar exista două paralele (*DE* şi *DE’*) la dreapta *BC*. Acest rezultat contrazice axioma lui Euclid (axioma paralelelor), deci este absurd $\Rightarrow$ presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow$ $[AE]\equiv[EC]$.

Demonstraţia părţii a doua a teoremei este imediată, deoarece $[DE]$ este linie mijlocie în ΔABC şi, conform teoremei directe asupra liniei mijlocii într-un triunghi, linia mijlocie are ca lungime jumătate din lungimea laturii cu care este paralelă $\Rightarrow DE=\frac{1}{2}\cdot BC$.

Definiţie

Segmentul care are ca extremităţi mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numeşte **linie mijlocie a trapezului**.

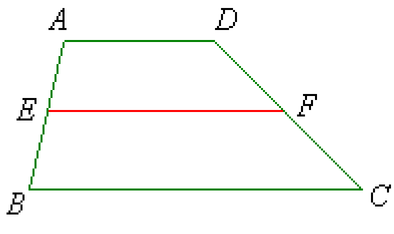


Fig. 10

Fiind dat trapezul *ABCD*, cu $[EF]$ linie mijlocie, acest lucru se poate scrie astfel: $E\in(AB),[AE]\equiv[EB]$ şi $F\in(DC),[DF]\equiv[FC]$.

Teorema 1.13

În trapezul *ABCD*, $[AD]$ şi $[BC]$ sunt bazele, E mijlocul laturii $[AB]$ şi *F* mijlocul laturii $[DC]$. Vrem să demonstrăm că dreptele *EF* şi *BC* sunt paralele şi că $EF = \frac{BC + AD}{2}$.

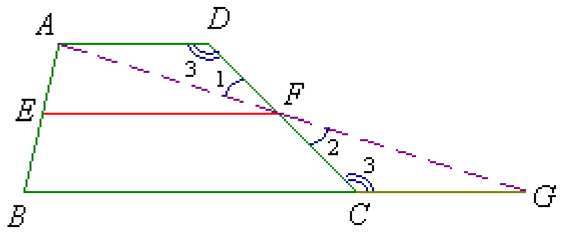


Fig. 11

Demonstraţie

Ne folosim de o construcţie ajutătoare. Considerăm dreapta determinată de punctele *A* şi *F* care intersectează dreapta *BC* în *G* ($AF \cap BC = \{G\}$). Triunghiurile *ADF* şi *GCF* sunt congruente conform cazului (ULU) pentru că: $\sphericalangle F_1 \equiv \sphericalangle F_2$ (opuse la vârf), $[DF] \equiv [CF]$ (ipoteză), $\sphericalangle D_3 \equiv \sphericalangle C_3$ (alterne interne).

Din $\Delta ADF \equiv \Delta GCF \Rightarrow [AF] \equiv [GF]$ (se opun unghiurilor congruente D_3 şi C_3) (1)

$[AD] \equiv [CG]$ (se opun unghiurilor congruente F_1 şi F_2) (2)

Relaţia (1) exprimă faptul că *F* este mijlocul laturii $[AG]$. Cum *E* este mijlocul laturii $[AB]$ (ipoteză) $\Rightarrow$ segmentul $[EF]$ este linie mijlocie în $\Delta ABG \Rightarrow EF \parallel BG$. Dar, *BC* şi *BG* sunt un şi aceeaşi dreaptă $\Rightarrow$EF || BC.

Din teorema liniei mijlocii într-un triunghi, ştim că $EF = \frac{BG}{2}$. Cum *BG* este o sumă de segmente, putem scrie $EF = \frac{BC + CG}{2}$. Ţinând seama de (2) $\Rightarrow EF = \frac{BC + AD}{2}$.

Teorema 1.14

Fie d_1, d_2, d_3 trei drepte paralele, cu secantele comune *s* şi *s'*, care le intersectează în punctele *A, B, C* şi *A', B', C'*, respectiv. Dacă *A-B–C*, atunci $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{A'B'}$.

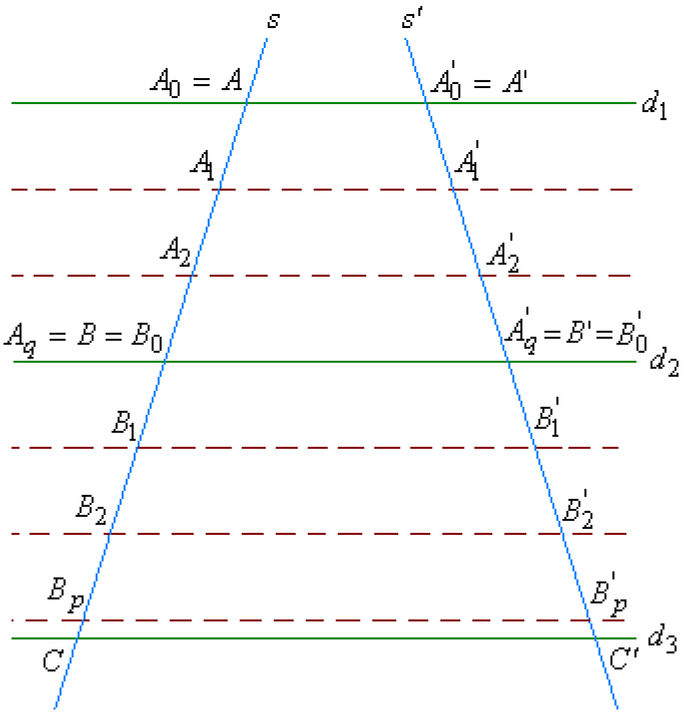


Fig. 12

Demonstraţie

Fie $x = \frac{BC}{AB}, y = \frac{B'C'}{A'B'}$. Alegem p şi q două numere naturale.

1) Împărţim mai întâi pe *[AB]* în q segmente congruente, ca în figură.

Luăm şirul de puncte $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_q = B$ în ordinea enunţată, pe semidreapta [AB, astfel ca lungimea fiecărui segment să fie *AB/q*.

2) Luăm pe semidreapta *[BC* un şir de p segmente, de aceeaşi lungime *AB/q*. Capetele acestora sunt $B = B_0, B_1, B_2, \dots, B_p$.

3) Proiectăm fiecare din punctele A_i , Bj pe s' după direcţia d', obţinând punctele A_i' şi Bj' pe s'. Deoarece toate segmentele mici de pe s sunt congruente, avem $\frac{BB_p}{AB} = \frac{p}{q}$.

Cum proiecţiile paralele păstrează congruenţa, toate segmentele mici de pe s' sunt congruente. Aşadar, $\frac{BB_p}{A'B'} = \frac{p}{q}$.

4) Presupunem că $\frac{p}{q} < x = \frac{BC}{AB} \Rightarrow p \cdot \frac{AB}{q} < BC \Rightarrow BB_p < BC \Rightarrow B - B_p - C$ şi $B' - B_p' - C'$, deoarece proiecţiile paralele păstrează relaţia *„între”*.

Aşadar, $B'B_p' < B'C'$, $p \cdot \frac{A'B'}{q} < B'C'$ şi $\frac{p}{q} < \frac{B'C'}{A'B'}$.

Am demonstrat că dacă $\frac{p}{q} < x$, atunci $\frac{p}{q} < y$.

5) Exact la fel se arată că dacă $\frac{p}{q} < y$, atunci $\frac{p}{q} < x$.

Rezultă din teorema de comparaţie că $x=y$, ceea ce trebuie demonstrat.

Reciproca acestei teoreme este importantă în demonstrarea paralelismului unor drepte în plan.

Teorema 1.15 (reciproca teoremei lui Thales)

Fie d_1, d_2, d_3 drepte care sunt intersectate de dreptele *a* şi *b* în *A*, *B*, *C*, respectiv *A'*, *B'*, *C'* astfel încât $\frac{AB}{BC} < \frac{A'B'}{B'C'}$, atunci $d_1||d_2||d_3$.

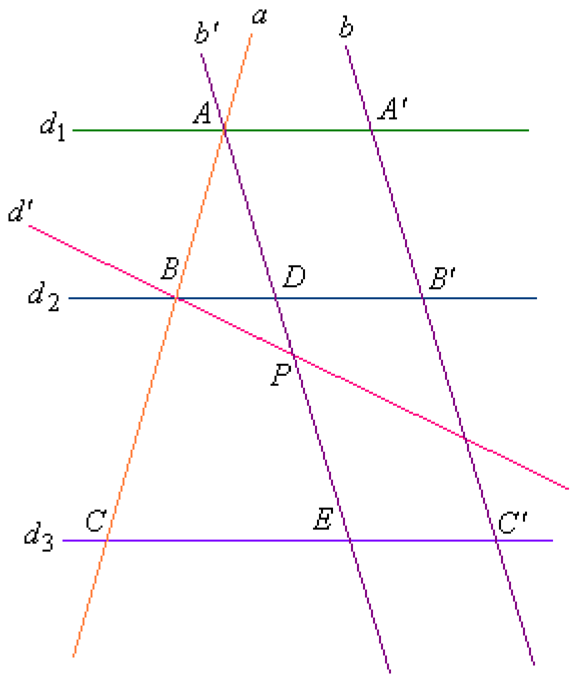


Fig. 13

Demonstraţie

Prin A se duce dreapta $b'||b \Rightarrow D \in d_2, E \in d_3$.

$AA'B'D$ paralelogram $\Rightarrow AD = A'B'$ (1)

$DB'C'E$ paralelogram $\Rightarrow DE = B'C'$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$.

Să presupunem că d_2 nu este paralelă cu d_3 $\Rightarrow$ conform axiomei paralelelor că există o dreaptă d' care trece prin B şi este paralelă cu d_3.

$d' \cap b' = \{P\} \Rightarrow$ conform teoremei lui Thales că $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PE}$.

Dar, din ipoteză se ştie că $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} \Rightarrow \frac{AP}{PE} = \frac{AD}{DE}$, ceea ce este imposibil, deoarece două puncte distincte nu pot în acelaşi raport un segment dat. Am demonstrat că $d_2 \| d_3$. Pentru a demonstra că $d_1 \| d_2$, se consideră în punctul C o dreaptă $b' \| b$ şi se reia demonstraţia de mai sus schimbând notaţiile.

Definiţie

Triunghiurile ΔABC şi $\Delta A'B'C'$ sunt **asemenea** dacă sunt îndeplinite următoarele corespondenţe:

1. $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$;

2. $\{AB, AC, BC\}$ proporţionale cu $\{A'B', A'C', B'C'\}$ sau $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Teorema 1.16

O paralelă la una din laturile unui triunghi determină cu celelalte două un triunghi asemenea cu cel dat.

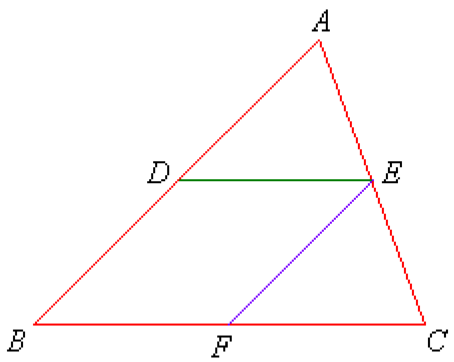


Fig. 14

Demonstraţie

Există trei situaţii posibile:

1. $A - D - B$
2. $A - B - D$
3. $B - A - D$

Se va demonstra doar cazul (1), deoarece celelalte cazuri se tratează în mod analog cazurilor considerate la consecinţa teoremei lui Thales.

Deoarece $DE||BC \Rightarrow \sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle BAC$ (s-a stabilit corespondenţa unghiurilor). Din teorema lui Thales $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Se construieşte $EF||AB$, $F \in (BC) \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$.

Deoarece $BDEF$ este paralelogram $\Rightarrow (DE) \equiv (BF)$ şi $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ $\Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$

2. DREAPTA PARALELĂ CU PLANUL

Definiţie

Dreapta *a* este paralelă cu planul α dacă *a* este inclusă în α sau *a* şi α nu au nici un punct comun.

Teorema 2.1.

O dreaptă *a* este paralelă cu un plan α dacă şi numai dacă există o dreaptă *b* în planul α astfel încât dreapta *a* să fie paralelă cu *b*.

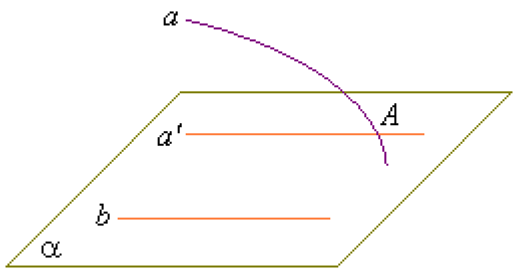


Fig. 15

Demonstraţie

"$\Leftarrow$"

Fie $b \subset \alpha$ şi $a \,||\alpha$. Presupunem prin absurd că dreapta *a* este neparalelă cu α, atunci *a* şi α au un punct comun $\Rightarrow \exists$ o paralelă unică a' la *b* $\Rightarrow a = a' \Rightarrow a \subset \alpha$ şi pe dreapta *a* există cel puţin două puncte, ambele conţinute în α, ceea ce este absurd.

"$\Rightarrow$"

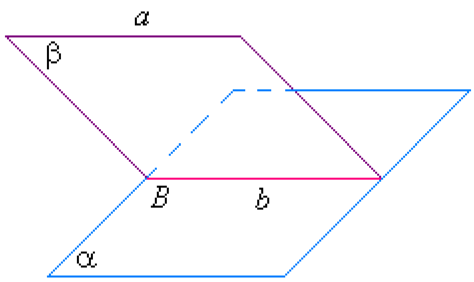


Fig. 16

Fie a||α şi demonstrăm, mai mult, că prin orice punct B din a trece o dreaptă b în α paralelă cu a. Dacă $a \subset \alpha$ şi $B \in a \Rightarrow b = a$. Dacă $a \subset \alpha$ şi $B \notin a$, paralela unică prin B la a este coplanară cu a, deci inclusă în α. Dacă $a \cap \alpha = \phi$ şi $B \in \alpha$, atunci *(a, B)* determină un plan β ce intersectează a după o dreaptă b. Dacă a şi b ar avea în comun un punct X, ar urma $X \in a \cap \alpha$, absurd. Deci, a şi b sunt coplanare şi disjuncte, adică paralele.

Din această teoremă, rezultă cu uşurinţă consecinţele de mai jos:

Consecinţa 1

Dacă a||α şi un plan β prin a taie α după o dreaptă b, are loc $a \parallel b$.

Consecinţa 2

Dacă a||α şi $B \in \alpha$, paralela prin B la dreapta a este inclusă în planul α.

Consecinţa 3

Dacă dreapta a este paralelă cu planele distincte α şi β, atunci $\alpha \parallel \beta$ sau $\alpha \cap \beta$ constituie o dreaptă b care este paralelă cu a.

Demonstraţie

Într-adevăr, dacă $\alpha \cap \beta = \phi$, atunci α||β. Dacă există un punct $B \in \alpha \cap \beta$, atunci paralela b prin B la a este inclusă conform consecinţei precedente în α şi în β, deci şi în $\alpha \cap \beta$. Dar $\alpha \cap \beta$ este o dreaptă ce trebuie să coincidă cu b.

3. PLANE PARALELE

Definiţie

Două plane se numesc paralele dacă nu au nici un punct comun.

Teorema 3.1.

Fie α şi β plane paralele distincte. Daca un plan γ diferit de α are intersecţie nevidă cu α, atunci γ intersectează şi planul β, iar dreptele de intersecţie sunt paralele.

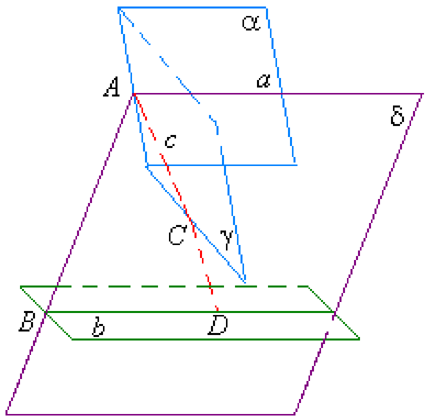


Fig. 17

Demonstrație

Fie $A \in \alpha \cap \beta, B \in \beta$ şi $C \in \gamma - \alpha$. Evident *A* şi *C* sunt distincte. Dacă *A, B, C* ar fi coliniare, *B* ar aparţine dreptei $AC \subset \gamma$, deci ar fi comun lui β şi γ.

Să admitem că *A, B, C* sunt colineare, deci sunt incidente unui plan δ unic determinat. Fie *a, b, c* dreptele de intersecţie ale planului δ cu planele α **şi** β, deci dreptele *b, c* sunt secante într-un punct *D*. Urmează imediat faptul că $D \in \beta \cap \gamma$.

Această teoremă stabileşte faptul că în situaţia în care se dau trei plane unde două sunt paralele, dacă al treilea intersectează unul atunci îl intersectează şi pe celălalt.

Teorema 3.2. (Criteriul de paralelism al planelor)

Condiţia necesară şi suficientă ca planele distincte α şi β să fie paralele este existenţa în α a două drepte secante *a, b*, fiecare din ele paralelă cu planul β.

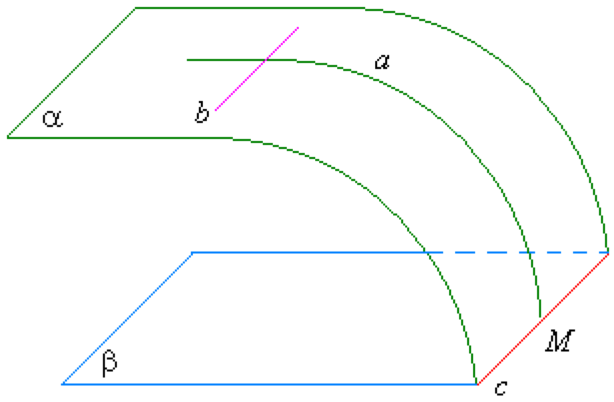


Fig. 18

Demonstrație

Necesitatea

Fie $\alpha \parallel \beta$ şi o dreaptă arbitrară $a \subset \alpha$. Dacă, prin absurd, *a* ar intersecta β într-un punct *M*, intersecţia planelor α şi β ar fi nevidă, deci planele α şi β ar coincide, în contradicţie cu ipoteza. Deci, $\alpha \parallel \beta$ şi $a \subset \alpha$ implică $a \parallel \beta$. Luând deci în α o pereche arbitrară *a, b* de drepte secante sunt dovedite relaţiile $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$.

Suficienţa

Fie *a, b* drepte secante incluse în α încât $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$. Să presupunem prin absurd că planele α şi β nu sunt paralele. Fiind distincte, aceste plane s-ar intersecta după o dreaptă *c*.

Datorită axiomei paralelelor nu se poate accepta ca ambele drepte *a, b* (coplanare cu *c*) să fie paralele dreptei *c*. Ar urma atunci, de exemplu, că există un punct *M* comun dreptelor *a, c*, deci *a* ar intersecta în *M* planul β, absurd. Singura alternativă rămasă este $\alpha \parallel \beta$.

Teorema 3.3.

a) Oricare ar fi punctul A neincident planului α, există un plan β incident lui A, încât $\alpha \parallel \beta$.

b) O dreaptă d arbitrară incidentă lui A este paralelă cu a dacă şi numai dacă $d \subset \beta$.

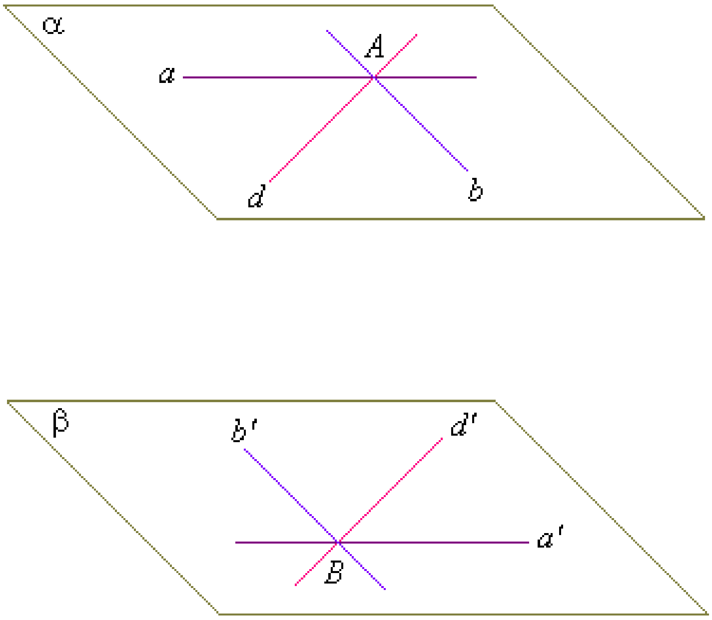


Fig. 19

Demonstraţie

a) Fie B în planul α şi dreptele distincte a', b' secante în B, incluse în α. Există prin A paralele unice $a \parallel a'$ şi $b \parallel b'$. Planul β ce conţine dreptele secante a, b este paralel cu α conform teoremei precedente.

b) "$\Leftarrow$"

Fie $d \subset \beta$ şi $A \in d$, planul determinat de d şi B intersectează α după o dreaptă d', rezultă $d \parallel d'$. Dacă nu ar fi aşa, atunci a şi b ar avea un punct comun, ceea ce este absurd.

"$\Rightarrow$"

Fie d incidentă cu A şi paralelă cu d, atunci planul prin B şi d taie α după o dreaptă d' şi β după o dreaptă e. Conform etapei precedente, $e \parallel d'$, iar conform consecinţei 1, $d \parallel a'$. Pentru a nu contrazice axioma paralelelor se impune e=d, deci $d \subset \beta$.

Concluzie

Fie α, β şi γ trei plane în spaţiu, acestea se pot afla doar în situaţiile:

1) α, β şi γ au un singur punct comun.

2) α, β şi γ au o dreaptă comună.

3) $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$, s-a arătat la teorema 3.2.

4) $\alpha \parallel \beta$ dacă $\alpha \cap \gamma \neq \phi$, atunci $\beta \cap \gamma \neq \phi$ şi dreptele de intersecţie sunt paralele. Acest fapt s-a dovedit la teorema 3.1.

5) $\alpha \cap \beta = c$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\beta \cap \gamma = a$. Cele trei plane se intersectează două câte două şi dreptele de intersecţie sunt paralele.

§ RELAŢII DE PERPENDICULARITATE

4. DREPTE PERPENDICULARE ÎN PLAN

Definiţie

Două drepte a şi b se numesc **perpendiculare** şi se notează $a \perp b$ dacă cel puţin un unghi dintre ele este drept.

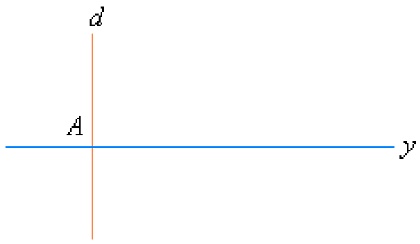


Fig. 20

Teorema 4.1. Fie o dreaptă şi un punct care nu este pe ea, atunci există o dreaptă care trece prin punctul dat şi este perpendiculară pe dreapta dată.

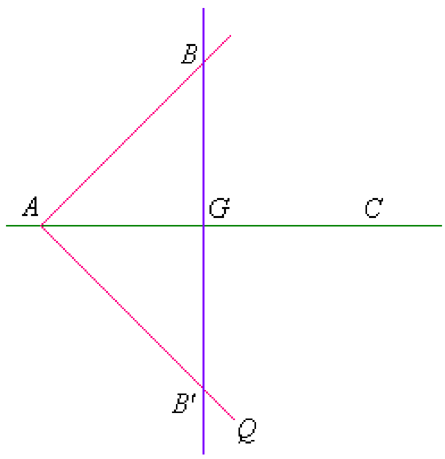


Fig. 21

Demonstraţie

Fie *d* o dreaptă şi *B* un punct care nu este pe *d*. Fie *A* şi *C* două puncte pe *d*. Conform axiomei de construcţie a unghiurilor, există un punct *Q* astfel ca *B* şi *Q* să fie de o parte şi de alta a lui *d* şi $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle QAC$. Din teorema de construcţie a segmentelor există *B* pe *AQ* astfel că $[AB] \equiv [AB']$. Deoarece *B* şi *B'* sunt de o parte şi de alta a lui *d*, *BB'* intersectează pe *d* într-un punct *G* $\Rightarrow$ două posibilităţi:

1) $G \neq A$. În acest caz $\Rightarrow$ din cazul de congruenţă L.U.L. că $\Delta AGB \equiv \Delta AGB'$ $\Rightarrow \sphericalangle AGB \equiv \sphericalangle AGB'$. Cum aceste unghiuri sunt cu laturile în prelungire, ele sunt suplementare şi deci fiecare din ele drept, adică $BG \perp AC$, ceea ce se cerea.

2) $G = A$. În acest caz $\sphericalangle BGC \equiv \sphericalangle B'GC$ $\Rightarrow$ şi în cazul 1) că $BG \perp AC$, q.e.d.

Teorema 4.2.

Perpendiculara pe o dreaptă dintr-un punct exterior este unică.

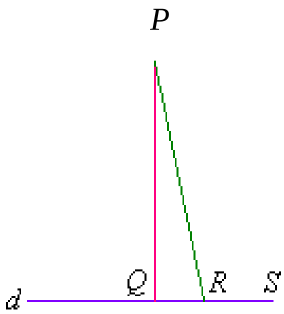


Fig. 22

Demonstraţie

Fie *d* o dreaptă şi *P* un punct exterior. Să presupunem că există două perpendiculare din *P* la *d*, $PQ \perp d$ şi $PR \perp d$. Fie $S \in d$ astfel încât $R \in (QS)$, atunci $\sphericalangle PRS$ este unghi exterior ΔPQR şi conform teoremei unghiului exterior $\sphericalangle PRS$ este mai mare decât oricare din unghiurile ΔPQR neadiacente lui. Presupunând că $\sphericalangle PQS$ ar fi fost drept, înseamnă că valoarea $\sphericalangle PRS$ este mai mare de $90°$, ceea ce înseamnă că din *P* se poate duce o singură perpendiculară pe dreapta *d*.

Teorema 4.3.

Fie α un plan, *d* o dreaptă în planul α şi un punct *P* pe *d*. Există o singură dreaptă în plan care conţine pe *P* şi este perpendiculară pe *d*.

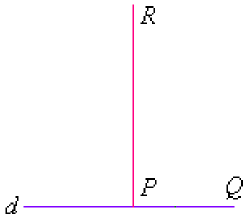


Fig. 23

Demonstraţie

Anterior, s-a demonstrat când $P \in d$. Fie $P \in d$, $Q \in d$ $\Rightarrow$ conform axiomei de construcţie a unui unghi, există un punct *R* astfel încât ∢ *QPR* să fie congruent cu un unghi drept, adică $RP \perp d$.

Unicitatea. Dacă ar exista două astfel de semidrepte *[PR* şi *[PR'*, atunci ∢QPR ≡ ∢QPR' deoarece toate unghiurile drepte sunt congruente. Aceasta ar fi imposibil, conform axiomei de purtare congruentă a unghiurilor.

Teorema 4.4.

Două unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare sunt congruente dacă ambele sunt ascuţite sau obtuze şi sunt suplementare dacă unul este ascuţit şi celălalt obtuz.

Demonstraţie

I. Vom demonstra mai întâi teorema când unghiurile au vârfurile în acelaşi punct.

a) Ambele unghiuri sunt ascuţite

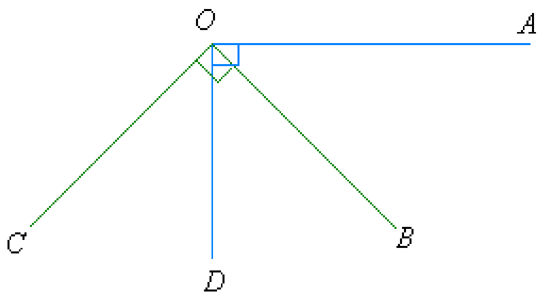


Fig. 24

Fie ∢*AOB* şi ∢*COD*, unde $[OA \perp [OD$ şi $[OB \perp [OC$.

Din $[OA \perp [OD$ $\Rightarrow$ m(∢*AOB)+m(*∢*BOD)*=90° sau m(∢*AOB)=90°* - *m(*∢*BOD).*

Din $[OB \perp [OC$ $\Rightarrow$ m(∢*BOD)+m(*∢*COD)*=90° sau m(∢*COB)=90°* - *m(*∢*BOD).*

Observăm că ∢*AOB* şi ∢*COD* au acelaşi complement, ceea ce înseamnă că sunt congruente.

b) Ambele sunt obtuze

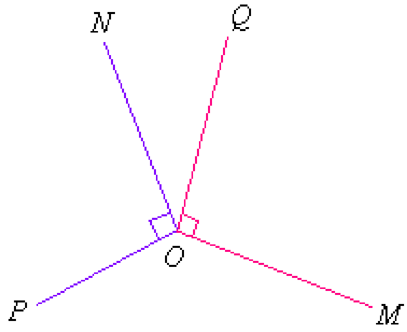


Fig. 25

Fie $\sphericalangle MON$ şi $\sphericalangle POQ$, unde $[OM \perp [OQ$ şi $[ON \perp [OP$.

Unghiurile $\sphericalangle MON$ şi $\sphericalangle POQ$ fiind neadiacente $\Rightarrow$ m($\sphericalangle MON$)=m($\sphericalangle BOQ$)+ m($\sphericalangle QON$) şi cum $[OM \perp [OQ$ mai putem scrie că m($\sphericalangle MON$)= 90°+ m($\sphericalangle QON$).

Pe de altă parte, m($\sphericalangle POQ$)=m($\sphericalangle PON$)+m($\sphericalangle NOQ$), $\sphericalangle PON$ şi $\sphericalangle NOQ$ fiind neadiacente şi cum $[ON \perp [OP$, mai putem scrie m($\sphericalangle POQ$)=90° - m($\sphericalangle NOQ$) $\Rightarrow$ suma 90°+ m($\sphericalangle NOQ$) reprezintă atât măsura $\sphericalangle MON$, cât şi a $\sphericalangle POQ$ $\Rightarrow \sphericalangle MON \equiv \sphericalangle POQ$.

c) Un unghi este ascuţit şi celălalt obtuz.

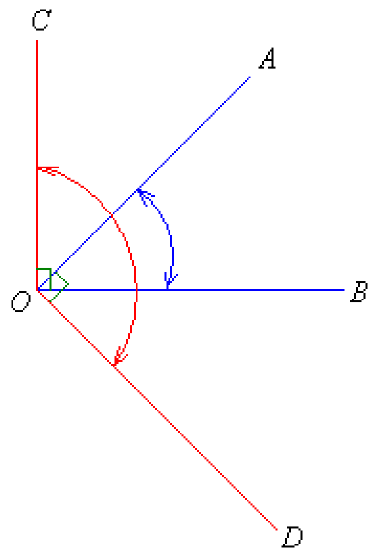


Fig. 26

Fie $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle COD$, m($\sphericalangle AOB$)<90°, m($\sphericalangle COD$)>90°, $[OA \perp [OD$ şi $[OB \perp [OC$

Observăm că $\sphericalangle COA$ şi $\sphericalangle BOD$ sunt neadiacente deci, putem însuma cele trei unghiuri, obţinând m($\sphericalangle COD$)=m($\sphericalangle COA$)+m($\sphericalangle AOB$)+m($\sphericalangle BOD$).

Mai observăm că $\sphericalangle AOB$ are ca unghi complementar $\sphericalangle AOC$ ($OB \perp OC$, din ipoteză) $\Rightarrow m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle AOB) = 90°$. (1)

Dar, $\sphericalangle AOB$ mai are ca unghi complementar și $\sphericalangle BOD$ ($OA \perp OD$, din ipoteză) $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle BOD)$+m($\sphericalangle AOB$) =90° (2)

Adunând relațiile (1) și (2) membru cu membru, obținem: $m(\sphericalangle COA)$+$m(\sphericalangle AOB)$+m($\sphericalangle BOD$)+m($\sphericalangle AOB$)=180°. Cum suma măsurilor primilor trei unghiuri este chiar măsura $\sphericalangle COD$, putem scrie: $m(\sphericalangle AOB)$+m($\sphericalangle COD$)=180°, ceea ce trebuia demonstrat.

II. Să considerăm cazul, mai general, când cele două unghiuri nu au vârfurile în același punct.

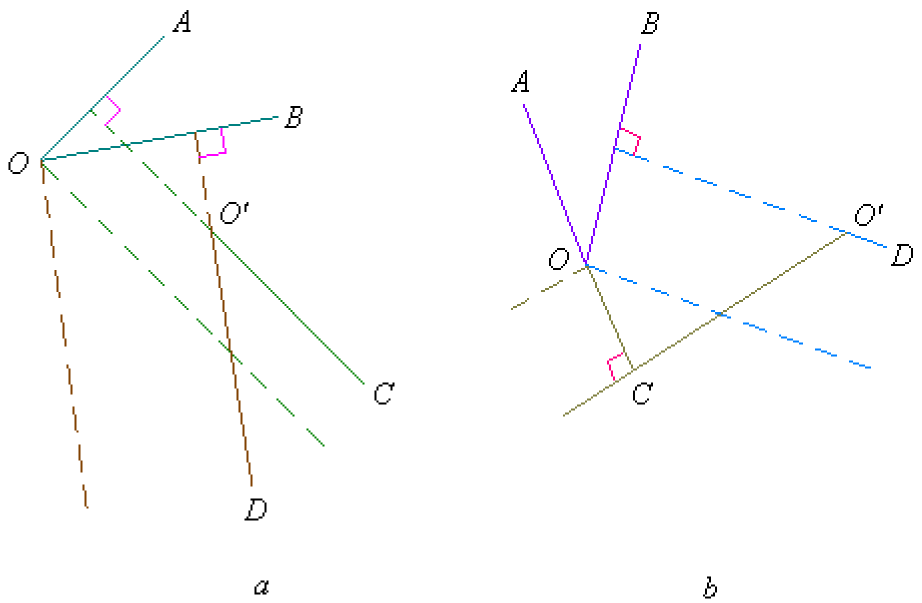


Fig. 27

Fie $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle CO'D$ și presupunem că $[OA \perp [O'C$ și $[OB \perp [O'D$, cu $m(\sphericalangle AOB) \leq 90°$ și $m(\sphericalangle CO'D) \leq 90°$, respectiv $m(\sphericalangle AOB) \leq 90°$ și $m(\sphericalangle CO'D) \geq 90°$.

Pentru a demonstra că $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle CO'D$ (a) și că $m(\sphericalangle AOB)$+m($\sphericalangle CO'D$)=180° (b) nu este nevoie de o demonstrație specială. Pentru aceasta, facem niște construcții ajutătoare, și anume: desenăm, de exemplu, în punctul O paralele la laturile $\sphericalangle CO'D$ (conform axiomei paralelelor, pentru fiecare latură a $\sphericalangle CO'D$ se poate construi prin O o singură paralelă).

Conform teoremei „Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente dacă sunt ambele ascuţite sau ambele obtuze şi sunt suplementare dacă unul este ascuţit, iar celălalt obtuz” rezultă unghiurile construite cu vârful în punctul O sunt congruente sau suplementare cu ambele unghiuri (valabil pentru ambele figuri).

De aici, demonstraţia este aceeaşi cu cea făcută în cazul particular când unghiurile aveau laturile perpendiculare şi vârfurile în acelaşi punct.

5. DREAPTĂ PERPENDICULARĂ PE UN PLAN

Definiţie

Fie un plan α şi o dreaptă p. Spunem că dreapta p este perpendiculară pe planul α dacă p şi α au în comun un punct O şi p este perpendiculară pe toate dreptele din α .

Teorema 5.1 (criteriul de perpendicularitate)

Dacă dreapta OP este perpendiculară pe dreptele distincte OA şi OB, atunci OP este perpendiculară pe planul (OAB).

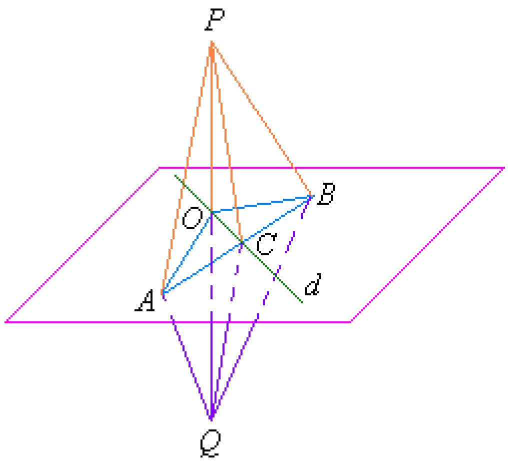


Fig. 28

Demonstraţie

Fie $OC = d$, $d \subset (OAB)$, $d \cap AB = \{C\}$ şi Q încât $(PO) \equiv (OQ)$ şi $OP \perp OA$, $OP \perp OB$, atunci $[OA]$ şi $[OB]$ sunt mediane, înălţimi în triunghiurile APQ şi BPQ. Cum $(AP) \equiv (AQ)$, $(BP) \equiv (QB)$ şi (AB) latură comună, atunci triunghiurile PAB şi QAB sunt congruente (L.L.L) $\Rightarrow$ şi triunghiurile APC şi AQC sunt congruente $\Rightarrow$ $[PC] \equiv [QC] \Rightarrow \Delta$CPQ este isoscel. CO fiind mediană într-un triunghi isoscel este şi înălţime adică $CO \perp PQ$ sau $OP \perp d$. În final, se constată că ipoteza $d \cap (AB) = \{C\}$ nu este restrictivă deoarece A şi B pot fi înlocuite cu simetricele lor A' şi B' faţă de O.

Consecinţa 1

Dacă $p \perp \alpha$ şi $O \in p \cap \alpha$, atunci o dreaptă d prin O este perpendiculara lui p dacă şi numai dacă este inclusă în α.

Demonstraţie

$"\Rightarrow"$

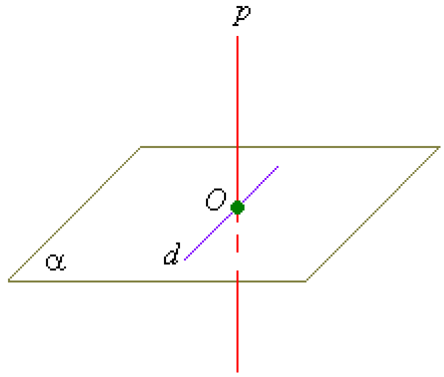


Fig. 29

Fie $p \perp \alpha$ şi O piciorul perpendicularei, $d \subset \alpha$, $O \in d \Rightarrow$ conform teoremei precedente că $p \perp d$.

$"\Leftarrow"$

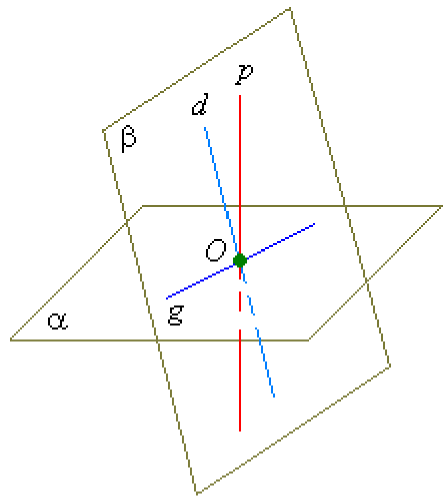


Fig. 30

Fie $p \perp \alpha$, $O \in \alpha$, $p \perp d$ şi se presupune că $d \not\subset \alpha$. Fie $\beta = (p,d)$, $O \in \beta$, $O \in \alpha \Rightarrow$ β şi α au o dreaptă comună g, $g \subset \alpha$, $p \perp g$, dar p, g şi d sunt coplanare în β, deci $g = d$.

Consecinţa 2

Printr-un punct O al dreptei p există un plan unic α incident lui O încât p perpendiculară pe α.

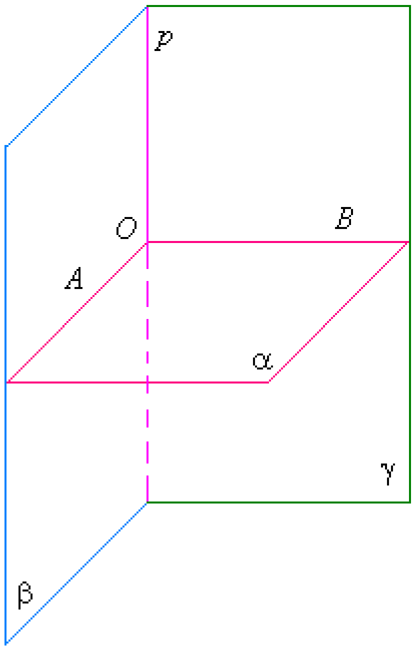


Fig. 31

Demonstrație

Fie β și γ două plane care conțin dreapta *p*. Se duc în *O* dreptele *OA* și *OB* perpendiculare pe *p*. Cum *OA* și *OB* sunt unice $\Rightarrow$ α =(*OAB)* este singurul plan care satisface condițiile enunțate.

Consecința 3

Printr-un punct *O* al planului α există o perpendiculară unică *p* ridicată în *O* pe planul α.

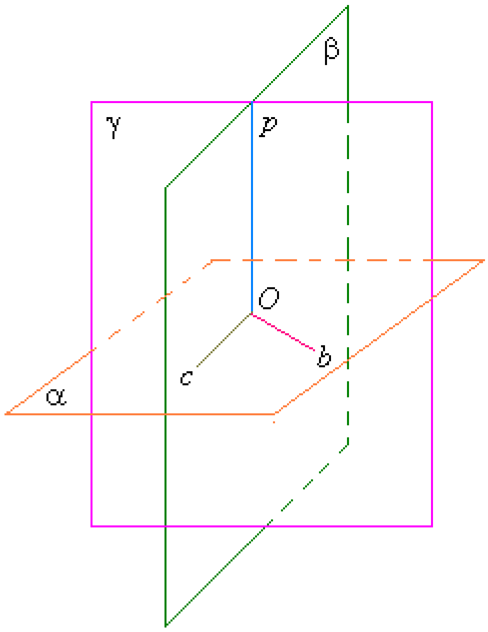


Fig. 32

Demonstraţie

Fie $b, c \subset \alpha$, β perpendicular în O pe b şi γ perpendicular în O pe c. Planele β şi γ au punctul O comun $\Rightarrow$ au o dreaptă comună numită p care este perpendiculară pe b şi c.

Teorema 5.2

Oricare ar fi planul α şi punctul P, există o dreaptă unică PQ perpendiculară pe planul α.

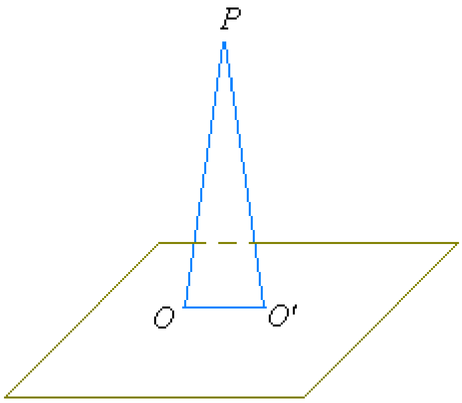


Fig. 33

Demonstraţie

Cazul $P \in \alpha$ a fost studiat anterior la consecinţa 3 a teoremei 2.5.1.

Fie $P \notin \alpha$, existenţa a fost dovedită la teorema 2.5.1, rămâne de demonstrat unicitatea.

Presupun $PO \perp \alpha$ şi $PO' \perp \alpha$, $O, O' \subset \alpha$. Punctele P, O şi O' determină un plan care taie α după dreapta OO' şi $PO \perp OO'$, $PO' \perp OO'$ absurd deoarece perpendiculara dintr-un punct la o dreaptă este unică $\Rightarrow O = O'$.

Teorema 5.3 (a celor trei perpendiculare)

Fie PA (d) o dreaptă perpendiculară pe planul α, A piciorul perpendicularei prin care se duce o dreaptă a perpendiculară pe o dreaptă b din α în punctul B, atunci PB este perpendiculară pe b.

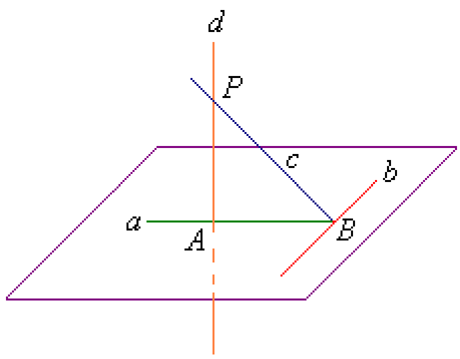


Fig. 34

Demonstraţie

Fie $PA \perp \alpha \Rightarrow PA \perp a$ şi $PA \perp b \Rightarrow b \perp PA$. Dar $b \perp a \Rightarrow b \perp (PA, a) \Rightarrow b \perp (PAB)$. Cum $PB \subset (PAB)$ $\Rightarrow b \perp PB \Rightarrow PB \perp b$.

Observaţie: Lungimea segmentului *PB* se numeşte distanţa de la *P* la *b*.

Teorema 5.4 (reciproca 1)

Dacă $PA \perp \alpha$, punctul *A* este piciorul perpendicularei, *b* o dreaptă oarecare în α încât $PB \perp b$, $B \in b$, atunci $AB \perp b$.

Demonstraţie

Din $PA \perp \alpha$ $\Rightarrow$ $PA \perp b$, deci $b \perp PA$ şi cum $b \perp PB$ $\Rightarrow$ $b \perp (PA, PB)$ $\Rightarrow b \perp (PAB)$, $AB \subset (PAB)$ $\Rightarrow b \perp AB$.

Teorema 5.5 (reciproca 2)

Fie un plan α şi un punct *P* nesituat în α. Fie *b* o dreaptă inclusă în α, *B* un punct încât $PB \perp b$, *a* o dreaptă care trece prin *B* perpendiculară pe *b* şi $A \in a$ încât $PA \perp a$, atunci $PA \perp \alpha$.

Demonstraţie

Avem $b \perp PB$ şi $b \perp a$, atunci $b \perp (PB, a) \Rightarrow b \perp (PAB)$ (conform criteriului de perpendicularitate) $\Rightarrow b \perp PA \Rightarrow PA \perp b$ şi cum $PA \perp a \Rightarrow PA \perp (a, b) \Rightarrow PA \perp \alpha$.

Observaţie. Lungimea *PA* se numeşte distanţa de la *P* la planul α.

Teorema 2.5.6.

Dacă *a* şi *b* sunt două drepte distincte perpendiculare pe un plan α, atunci *a* şi *b* sunt drepte coplanare nesecante.

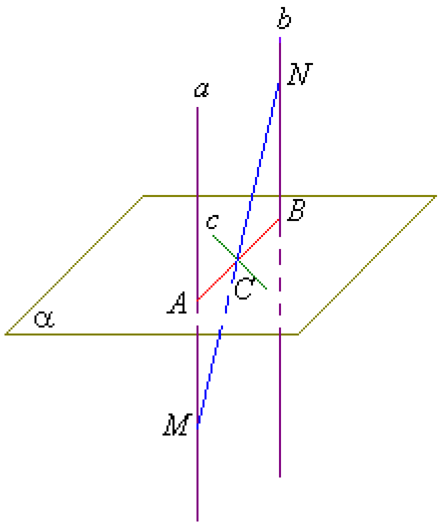


Fig. 35

Demonstraţie

Fie planul α şi dreptele *a*, *b* încât $a \perp \alpha$ în *A*, $b \perp \alpha$ în *B*. Se consideră $M \in a$, $N \in b$ separate de $\alpha \Rightarrow \exists C \in MN \cap \alpha$, conform consecinţei 2 a teoremei 2.5.1, $\exists$ un plan β perpendicular pe *MN* în *C* $\Rightarrow \beta \cap \alpha = c, c \in \beta, \beta \perp MN \Rightarrow c \perp MN$ şi $MA \perp \alpha$ $\Rightarrow$ conform teoremei 2.5.4 că $AC \perp c$ în planul α .

Analog, se demonstrează că $BC \perp c$ şi din unicitatea perpendicularei dintr-un punct pe o dreaptă $\Rightarrow$ $AC=BC$, $C \in (AB), c \perp AB \Rightarrow$ *MN* şi *AB* concurente determină un plan care conţine dreptele *a* şi *b*. Astfel, *a* şi *b* sunt coplanare. Dacă *a* şi *b* ar fi secante într-un punct *P*, s-ar contrazice unicitatea perpendicularei dintr-un punct la un plan.

Teorema 2.5.7

Două plane perpendiculare pe aceeaşi dreaptă sunt paralele.

Demonstraţie

Dacă ar avea un punct comun, atunci unindu-l cu punctele de intersecţie ale celor două plane cu dreapta pe care sunt perpendiculare am obţine două perpendiculare din acel punct pe dreaptă, ceea ce este imposibil.

2.6 PLANE PERPENDICULARE

Definiţie

Spunem că planul β este perpendicular pe planul α şi se notează $\beta \perp \alpha$, dacă există în β o dreaptă *b* perpendiculară pe α .

Teorema 2.6.1

Relaţia de perpendicularitate a planelor este simetrică.

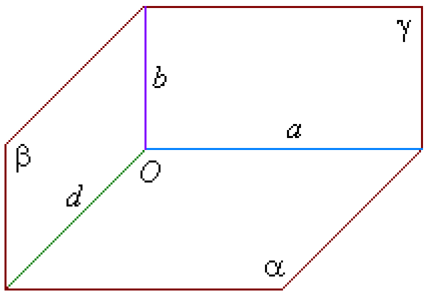


Fig. 36

Demonstraţie

Dacă $\beta \perp \alpha$, atunci există $b \subset \beta$ încât $b \perp \alpha$. Dreapta *b* are un punct *O* comun cu *a*, atunci $\alpha \cap \beta = d$. Fie γ planul perpendicular în *O* pe *d* şi $a = \alpha \cap \gamma$. Cum $b \perp d$, $b \subset \gamma$, $a \perp d$. Din $b \perp a \Rightarrow a \perp b$ $\Rightarrow a \perp (d, b) \Rightarrow a \perp \beta$ deci există $a \subset \alpha$ şi $a \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$ (conform definiţiei).

Teorema 2.6.2

Dacă planele α, β sunt perpendiculare, atunci prin orice punct A din α trece o perpendiculară *a* pe planul β şi $a \subset \alpha$.

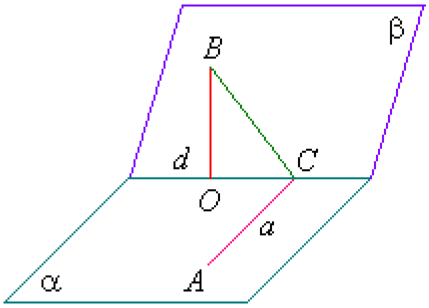


Fig. 37

Demonstraţie

Dacă $\alpha \perp \beta$, atunci există o dreaptă $BO \subset \beta$ încât $BO \perp \alpha$ şi $\alpha \cap \beta = d$. Presupunem $O \in d$ şi $B \notin d$, pentru *A* arbitrar în α -d. Fie *AC* perpendiculara din *A* pe *d* încât $C \in d$. Dacă *C* = *O* rezultă conform teoremei precedente că $AC \perp \beta$.

Dacă $C \neq O$, din $BO \perp \alpha,\ a \subset \alpha \Rightarrow BO \perp a \Rightarrow a \perp BO, a \perp d \Rightarrow a \perp (BO, d)$ $\Rightarrow a \perp (BOC), BC \subset (BOC) \Rightarrow a \perp BC, a \perp d \Rightarrow a \perp \alpha$.

Consecinţă

Dacă planele secante β şi γ sunt perpendiculare pe un plan α, atunci dreapta de intersecţie a planelor β şi γ este perpendiculară pe planul α.

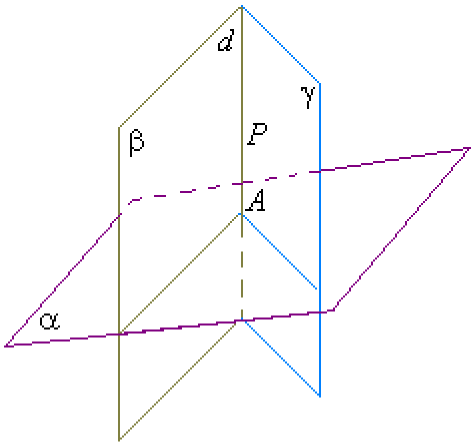


Fig. 38

Demonstraţie

Dacă $\beta \perp \alpha, \gamma \perp \alpha$ şi $\beta \cap \gamma = d$, atunci $d \perp \alpha$. Fie $P \in \beta \cap \gamma$, conform teoremei anterioare există dreapta *d* care trece prin punctul *P*, perpendiculară pe planul α în *A*. Dacă $P \in \beta$, atunci $d \subset \beta$, dacă $P \in \gamma$, atunci $d \subset \gamma$, deci $d \subset \beta \cap \gamma$ şi $d \perp \alpha$.

Teorema 2.6.3

Fie o dreaptă a şi un plan α. Dacă nu are loc $a \perp \alpha$, atunci există un plan unic β ce include a şi este perpendicular pe α.

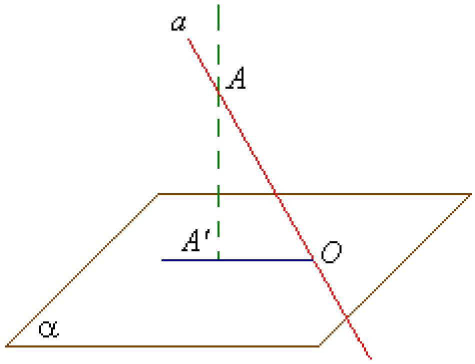


Fig. 39

Demonstraţia

Fie $A \in \alpha$ şi $AA' \perp \alpha, A' \in \alpha, \beta \in (AA', a)$, evident $\beta \perp \alpha$. Orice plan γ ce conţine a şi este perpendicular pe α va conţine punctul A şi o perpendiculară AA'' din A pe a, conform unicităţii perpendicularei dintr-un punct la un plan $AA' = AA''$, deci $\gamma = \beta$.

Observaţie: Dreapta $\alpha \cap \beta$ se numeşte **proiecţia ortogonală** a lui a în α.