Raluca Mariana COZMA

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE PARALELISM ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU

ISBN: 978-973-579-364-7

Editura Spiru Haret

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE PARALELISM ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU

I. PARALELISM ÎN PLAN. METODE DE DEMONSTRAŢIE

Sunt numeroase probleme de geometrie plană, în care se cere să se arate că, anumite drepte sunt paralele, sau în care, pentru obţinerea rezultatului, în prealabil, trebuie arătat că două drepte sunt paralele.

Pentru rezolvarea acestui tip de probleme, rezolvitorul trebuie să fie familiarizat cu noţiunea de paralelism, cu axioma paralelelor. El trebuie să ştie că, existenţa paralelelor este asigurată de teorema „pentru orice dreaptă a şi orice punct $P \notin a$, există o dreaptă *b*, astfel încât $a \parallel b$”, dar unicitatea paralelei este asigurată de axioma paralelelor. De asemenea, trebuie să aibă bune deprinderi de a utiliza cunoştinţe referitoare la: unghiurile cu laturile respectiv paralele, teorema lui Thales, linia mijlocie a triunghiului şi linia mijlocie a trapezului, definiţia şi proprietăţile paralelogramului şi paralelogramelor particulare, etc.

În continuare, voi prezenta unele metode de rezolvare, pentru aceste tipuri de probleme, fiind însoţite de câteva probleme care să permită o cât mai bună înţelegere a acestora.

Metoda 1. **Demonstrarea paralelismului folosind rezultatul (teorema) că „Dacă două drepte tăiate de o secantă formează perechi de unghiuri congruente – alterne interne sau externe, corespondente, suplimentare, interne de aceeaşi parte a secantei sau externe de aceeaşi parte a secantei, atunci cele două drepte sunt paralele.”**

P1. Într-un paralelogram *ABCD*, bisectoarele unghiurilor alăturate şi *D* se intersectează în punctul *M*. Să se demonstreze că, mediana *MN* a triunghiului *MAD* este paralelă cu laturile *AB* şi *DC* ale paralelogramului.

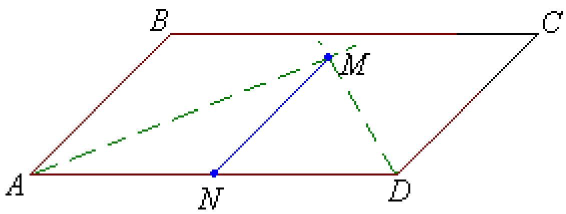

Fig. 1

Demonstrație

Avem $AN = ND$. Triunghiul AMD este dreptunghic în M, iar ΔMND este isoscel $\Rightarrow$ $\sphericalangle NDM \equiv \sphericalangle NMD \equiv \sphericalangle MDC \Rightarrow MN \parallel CD.$

P2. Fie triunghiul ABC și B' piciorul perpendicularei dusă din B pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Să se arate că, B' se află pe dreapta ce unește mijloacele laturilor AB și BC.

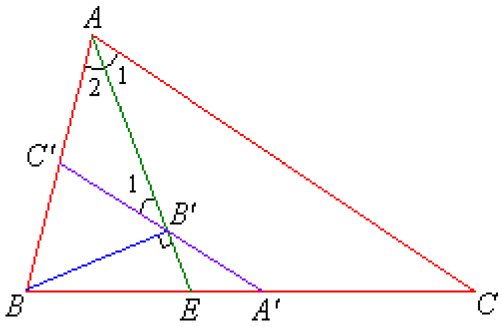

Fig. 2

Demonstrație

Fie $[AE$ bisectoarea $\sphericalangle BAC \Rightarrow \sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$.

Fie $BB' \perp AE$ și C' mijlocul lui AB. În triunghiul dreptunghic $AB'B$, prin ipoteză, $B'C'$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei, adică $B'C' = AC'$. Rezultă că $\sphericalangle B'_1 \equiv \sphericalangle A_2 \equiv \sphericalangle A_1$ și, prin urmare, $B'C' \parallel AC$. Cum C este mijlocul lui AB, urmează că B' se află pe linia mijlociei a ΔABC.

P3. Se dă patrulaterul inscriptibil $ABCD$ și se duc perpendicularele AA' și BB' pe diagonalele BD și AC. Să se demonstreze că dreapta $A'B'$ este paralelă cu latura CD.

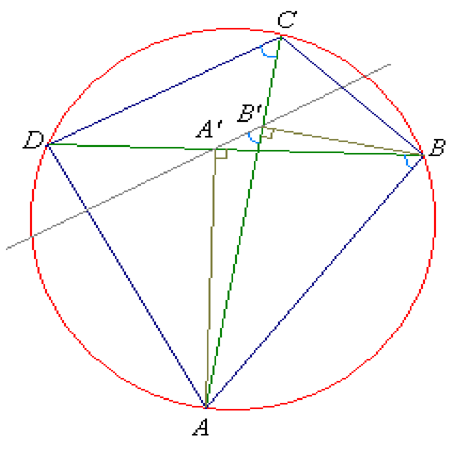

Fig. 3

Demonstrație

Patrulaterul $AA'B'B$ este inscriptibil, deoarece $\sphericalangle AA'B \equiv \sphericalangle BB'A \Rightarrow \sphericalangle AB'A' \equiv \sphericalangle ABD$ și cum $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD \Rightarrow \sphericalangle AB'A' \equiv \sphericalangle ACD \Rightarrow$ dreptele $A'B'$ și CD, tăiate de secanta AC formează unghiuri corespondente congruente $\Rightarrow A'B' \parallel CD$.

P4. Se duce în ΔABC o antiparalelă DE la latura BC. Să se demonstreze că, simetrica lui DE faţă de bisectoarea unghiului A este paralelă cu latura BC. (Două drepte concurente d_1 şi d_2 se numesc antiparalele faţă de alte două drepte concurente $d_1^{'}$ şi $d_2^{'}$**,** dacă în patrulaterul pe care îl formează, unghiurile opuse sunt suplementare).

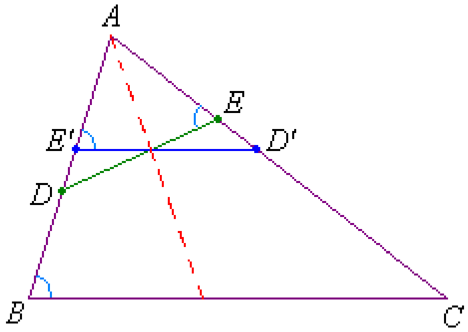

Fig. 4

Demonstraţie

Fie D pe AB, iar E pe AC. Simetricul D' al lui D se află pe AC, iar simetricul E' al lui E se află pe AB. Se arată că $\Delta ADE \equiv \Delta AD'E'$, de unde rezultă că $\sphericalangle AE'D' \equiv \sphericalangle AED$ şi , cum $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ABC$, din definiţia antiparalelei, urmează că $\sphericalangle AE'D' \equiv \sphericalangle ABC$, de unde urmează că $D'E' \| BC$.

P5. Pe diagonala AC a paralelogramului $ABCD$ se ia un punct oarecare O. Paralela prin O la latura BC taie laturile AB şi CD, respectiv în M şi N, iar paralela prin O la latura AB taie laturile BC şi AD, respctiv în P şi Q. Să se demonstreze că, dreptele MQ şi NP sunt paralele.

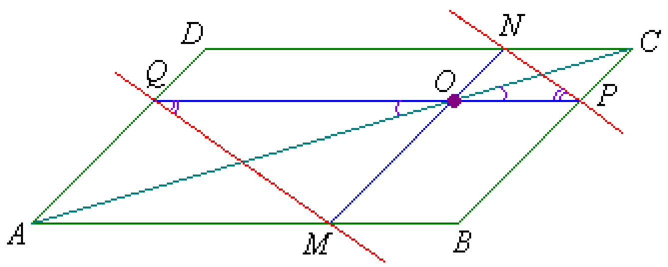

Fig. 5

Demonstraţie

$AM \| CN \Rightarrow \Delta AOM \sim \Delta CON \Rightarrow \dfrac{OM}{ON} = \dfrac{OA}{OC}$, iar din $\Delta OQA \sim \Delta OPC \Rightarrow \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{OA}{OC} \Rightarrow \dfrac{OM}{ON} = \dfrac{OQ}{OP}$ şi cum $\sphericalangle MOQ \equiv \sphericalangle NOP \Rightarrow \Delta MOQ \sim \Delta NOP \Rightarrow \sphericalangle MQO \equiv \sphericalangle NPO$. Prin urmare, $MQ \| NP$.

P6. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul de centru O. Din vârfurile B şi C se duc înălţimile BM şi CN. Să se demonstreze că, tangenta în A la cerc este paralelă cu dreapta MN.

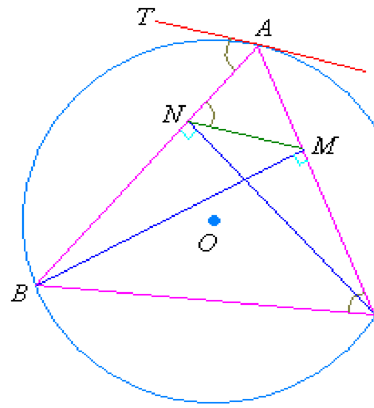

Fig. 6

Demonstraţie

Fie AT tangenta în punctul A la cercul de centru O, circumscris ΔABC şi fie MN dreapta care uneşte picioarele perpendicularelor duse din vârfurile B şi C pe laturile opuse.

Patrulaterul $BCMN$ este inscriptibil, pentru că $\sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle CNB = 90^0 \Rightarrow \sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle MNA$. Cum $\sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle BAT$, $\sphericalangle MNA \equiv \sphericalangle NTA$ (alt. int.) şi, deci, $AT \| MN$.

P7. Fie cercurile de centru O şi O', secante în A şi B, de razei R şi R'. Prin punctele A şi B se duc două secante paralele, CAD şi EBF, care intersectează cele două cercuri, respectiv în punctele C, D şi E, F. Să se demonstreze că, patrulterul $CDFE$ este paralelogram.

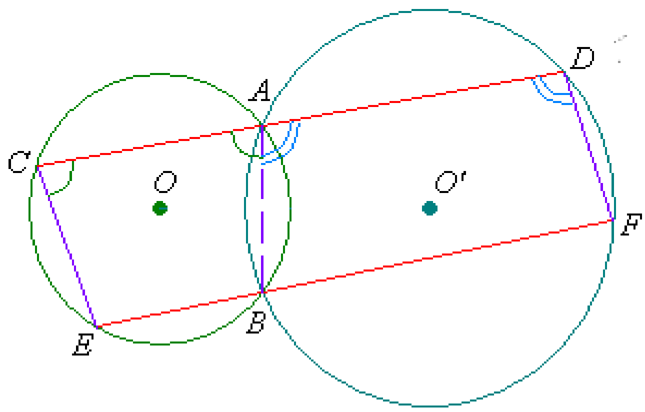

Fig. 7

Demonstraţie

Se observă că $\sphericalangle ECA \equiv \sphericalangle CAB$, având aceeaşi măsură.(Se ţine seama că $CD \| EF$). Din figura alăturată, avem că $\sphericalangle CAB + \sphericalangle BAD = 180°$ şi cum $\sphericalangle ECA \equiv \sphericalangle CAB$, avem $\sphericalangle ECA + \sphericalangle BAD = 180°$. Analog, se arată că $\sphericalangle ADF \equiv \sphericalangle BAD$.

Din $\sphericalangle ECA + \sphericalangle BAD = 180°$ şi $\sphericalangle ADF \equiv \sphericalangle BAD \Rightarrow \sphericalangle ECA + \sphericalangle ADF = 180°$.

Dar, C, A şi D sunt coliniare $\Rightarrow CE \| DF$.

Deoarece, din ipoteză, $CD \| EF$ şi cum $CE \| DF$ $\Rightarrow$ patrulaterul $CDFE$ este paralelogram.

P8. Pe diagonala *BD* a pătratului *ABCD* se ia un punct *P*, prin care se duce o dreaptă arbitrară care taie laturile opuse *AB* şi *CD* în punctele *M*, respectiv *N*. Perpendiculara în *P* pe dreapta *MN*, taie laturile opuse *AD* şi *BC*, respectiv în *Q* şi *R*. Să se arate că, patrulaterul *MQNR* este un trapez isoscel.

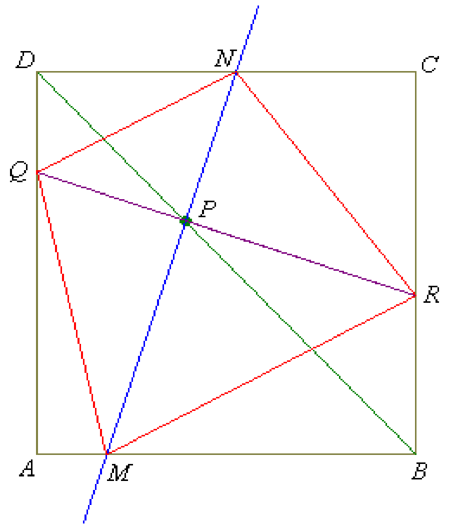

Fig. 8

Demonstraţie

Patrulaterele *DNPQ* şi *MPRB* sunt inscriptibile de unde rezultă, ţinând seama că diagonalele pătratului sunt bisectoare pentru unghiurile lui, că $\sphericalangle NQP \equiv \sphericalangle QNP = 45°$ şi , deci, ΔPQN este isoscel, cu *PQ=PN*.

Analog, se arată că ΔPMR este isoscel, cu *PM=PR*.

Cum $\sphericalangle NQP \equiv \sphericalangle PRM$ şi *Q*, *P* şi *R* sunt coliniare $\Rightarrow MR \| QN$ şi , deci, patrulaterul este un trapez. Din *PN=QN* şi *PR=PM* $\Rightarrow$ *MQNR* este trapez isoscel.

P9. Fie *ABCD* un paralelogram şi *I* punctul de intersecţie în care cercul circumscris triunghiului *ABC* intersectează pe *BD*. Dacă *E* şi *F* sunt punctele de intersecţie ale dreptelor *AI* şi *CD*, respectiv *CI* şi *AD*, să se arate că $EF \| AC$.

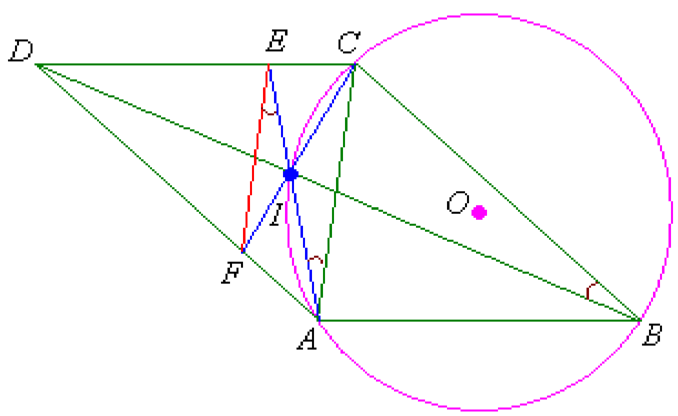

Fig. 9

Demonstrație

Avem $\sphericalangle EIF \equiv \sphericalangle CIA$ (opuse la vârf).

Patrulaterul *ABCI* este inscriptibil, deci $\sphericalangle ABC + \sphericalangle AIC = 180°$ și , cum $\sphericalangle AIC \equiv \sphericalangle EIF \Rightarrow \sphericalangle EDF + \sphericalangle EIF = 180° \Rightarrow$ că patrulaterul *EDFI* este inscriptibil. De aici, avem că $\sphericalangle FDI \equiv \sphericalangle FEI$ și , cum $\sphericalangle FDI \equiv \sphericalangle DBC$, iar $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle IAC \Rightarrow \sphericalangle FEA \equiv \sphericalangle CAE$ (S-a ținut seama că punctele *B, I, D*; *E, I, A* și *C, I, A* sunt coliniare).

Din $\sphericalangle FEA \equiv \sphericalangle EAC \Rightarrow EF \parallel AC$.

***Metoda a doua.* Demonstrarea paralelismului folosind reciproca teoremei lui Thales**

P1. Fie triunghiul oarecare *ABC*, bisectoarele unghiurilor formate de mediana *AM* ($M \in BC$) cu latura *BC*, intersectează pe *AB* în *P* și pe *AC* în *Q*. Să se arate că $PQ \parallel BC$.

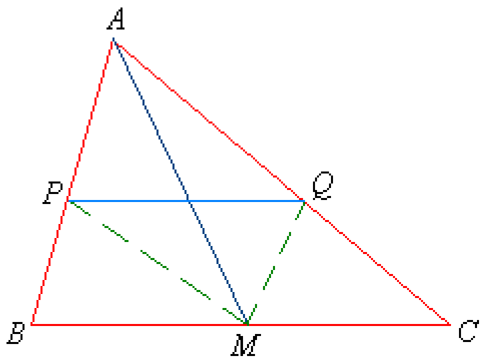

Fig. 10

Demonstrație

Fie *M* mijlocul lui *BC* $\Rightarrow BM=MC$. Din teorema bisectoare aplicată triunghiurilor *AMB* și *AMC* (cu *MB* și *MQ* bisectoare) $\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{PA}{PB}$ și $\frac{AM}{MC} = \frac{QA}{QC}$. Prin urmare, $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QC}$ și . conform reciprocei teoremei lui Thales $\Rightarrow PQ \parallel BC$.

P2. Fie patrulaterul *ABCD*. Paralela prin *B* la latura *AD* intersectează diagonala *AC* în *E*, iar paralela prin *A* la latura *BC* intersectează diagonala *BD* în *F*. Să se arate că $EF \parallel CD$.

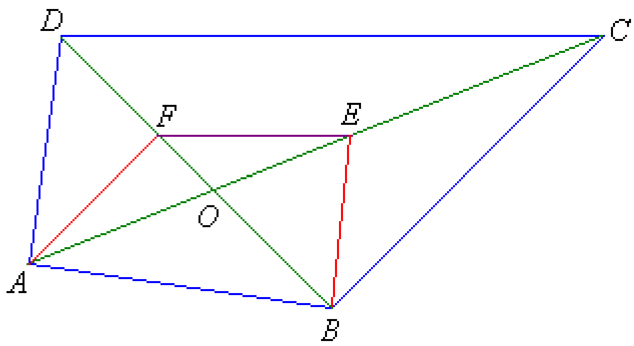

Fig. 11

Demonstraţie

Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor AC şi BD.

Din $AF \parallel BC \Rightarrow \Delta BOC \sim \Delta FOA \Rightarrow \frac{AO}{OC} = \frac{FO}{OB}$, iar din $\Delta AOD \sim \Delta EOB \Rightarrow \frac{AO}{OE} = \frac{OD}{OB}$.

Cum $AO \cdot OB = OC \cdot OF = OE \cdot OD \Rightarrow \frac{OE}{OC} = \frac{OF}{OD}$ şi , conform reciprocei teoremei lui Thales, urmează că $EF \parallel CD$.

P3. Fie paralelogramul *ABCD*. Pe diagonala *BD* se ia un punct *M*. Paralelele duse prin *M* la laturile *AB* şi *BC* intersectează laturile *AD*, *DC*, respectiv în *N* şi *P***.** Să se arate că $NP \parallel AC$.

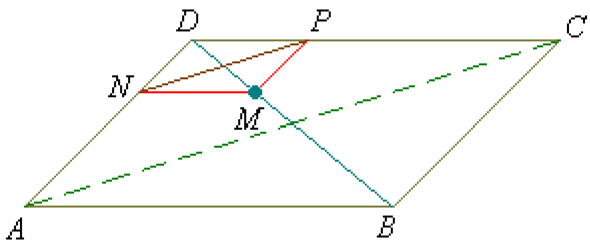

Fig. 12

Demonstraţie

Cum $MN \parallel AB \Rightarrow \frac{DM}{MB} = \frac{DN}{NA}$, iar $MP \parallel BC \Rightarrow \frac{DM}{MB} = \frac{DP}{PC} \Rightarrow \frac{DN}{NA} = \frac{DP}{PC} \Rightarrow NP \parallel$ AC.

P4. Fie ΔABC şi punctele *M* şi *N*, pe laturile *AB* şi *AC* astfel încât $MA=2MB$**,** iar $3MC=5EC$**,** unde *E* este punctul de intersecţie al dreptelor *BN* şi *CM*. Să se arate că $MN \parallel BC$.

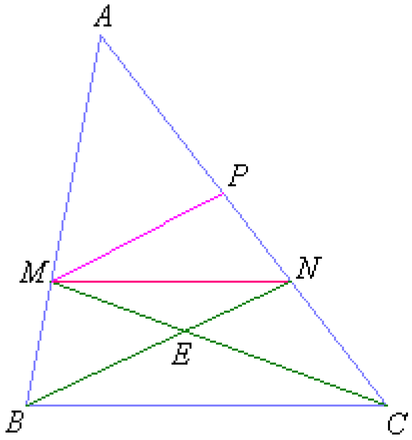

Fig. 13

Demonstrație

Ducem $MP \| BN$, cu $P \in AC$ $\Rightarrow$ $\frac{MA}{MB} = \frac{AP}{PN}$ şi , cum $\frac{MA}{MB} = 2 \Rightarrow$ $\frac{PA}{PN} = 2$ $\Rightarrow$ $\frac{PA + PN}{PN} = 3 \Rightarrow$ $\frac{AN}{PN} = 3$.

Din $EN \| PM$ $\Rightarrow$ $\frac{PC}{NC} = \frac{MC}{EC}$ şi cum $\frac{MC}{EC} = \frac{5}{3} \Rightarrow$ $\frac{PC}{NC} = \frac{5}{3} \Rightarrow$ $\frac{CP - NC}{NC} = \frac{5-3}{3}$, adică $\frac{PN}{NC} = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $\frac{AN}{NC} = 2$ şi cum $\frac{MA}{MB} = 2$ $\Rightarrow$ $\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow MN \| BC$.

P5. Într-un patrulater convex *ABCD*, se ia pe latura *AB* un punct *E*. Prin *E* se duce o paralelă la latura *CD*, care taie diagonala *BD* în *M*. Prin *D* se duce o paralelă la *AB*, care taie dreapta *EC* în *N*. Să se arate că *MN* este paralelă cu *BC*.

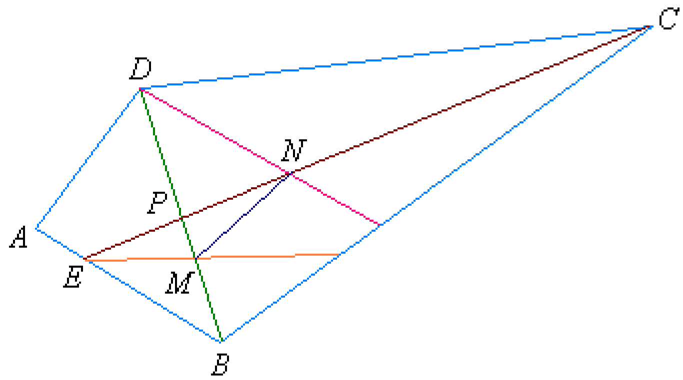

Fig. 15

Demonstrație

Notăm cu *P* intersecţia dreptelor *BD* şi *CE*. Din perechile de triunghiuri *EPM*, *CPD* şi *EPB*, *NPD* $\Rightarrow$

$\frac{PM}{PD} = \frac{PE}{PC}$ (1)

$$\frac{PB}{PD}=\frac{PE}{PN} \ (2)$$

Din (1) şi (2) $\Rightarrow PM\cdot PC=PB\cdot PN$ sau $\frac{PM}{PB}=\frac{PN}{PC} \Rightarrow MN\parallel BC$.

P6. Dacă paralela la *AB* prin intersecţia *O* a diagonalelor patrulaterului convex *ABCD* taie pe *AD* în *E*, iar pe *BC* în *F*, astfel încât $EO=OF$, atunci $AB\parallel CD$.

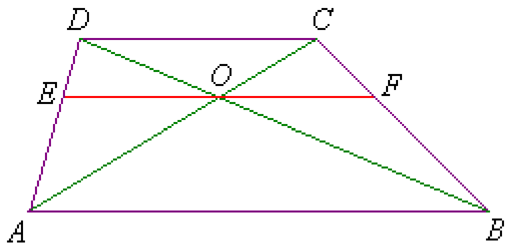

Fig. 15

Demonstraţie

În ΔABD, $EO\parallel AB$ şi deci, $\frac{EO}{AB}=\frac{DO}{DB}$ (1)

În ΔABC, $OF\parallel AB$ şi deci, $\frac{OF}{AB}=\frac{OC}{AC}$ (2)

Din (1) şi (2) şi din relaţia $OE\equiv OF$, avem $\frac{DO}{DB}=\frac{OC}{CA}$, iar $\sphericalangle DOC\equiv\sphericalangle AOC$ $\Rightarrow CD\parallel AB$.

***Metoda a treia.* Demonstrarea paralelismului a două drepte folosind linia mijlocie a unui triunghi şi a unui trapez**

P1. Prin vârful *B* al unui triunghi *ABC* se duce o dreaptă care întâlneşte în *M* mediana *AA'*. Paralela prin *M* la *AB* taie pe *BC* în *P*, iar *AP* pe *BM* în *N*. Să se arate că, *A'N* este paralelă cu *AC*.

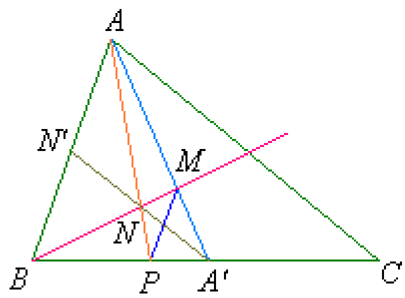

Fig. 16

Demonstraţie

Dreptele *A'N* şi *AB* se intersectează în *N'*. Dreapta *A'N* uneşte punctul de intersecţie al diagonalelor trapezului *AMPB* cu punctul de intersecţie al laturilor neparalele ale acestuia şi, deci, ea trece prin mijloacele bazelor *AB* şi *MP*. Prin urmare, *N'* este mijlocul laturii *AB* şi rezultă că $A'N \parallel AC$.

P2. Pe laturile patrulaterului convex *ABCD* se consideră punctele *M*, *N*, *P* şi *Q* mijloacele segmentelor *AB*, *BC*, *CD* şi *DA*. Să se arate că patrulaterul *MNPQ* este paralelogram.

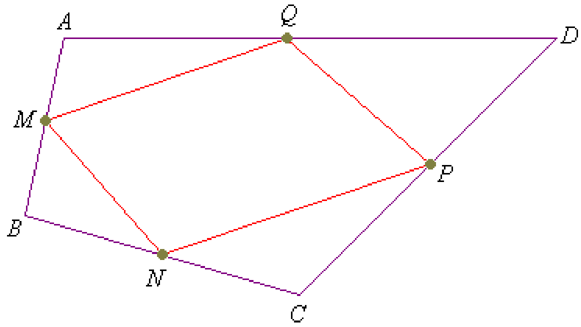

Fig. 17

Demonstraţie

Din ΔABC, cu *MN* linie mijlocie $\Rightarrow$ $MN \parallel AC$, iar din ΔACD, cu *PQ* linie mijlocie $\Rightarrow$ $PQ \parallel AC$. Din $MN \parallel AC$ şi $PQ \parallel AC$ $\Rightarrow$ $MN \parallel PQ$.

Analog, se arată că $PN \parallel MQ$ şi din $MN \parallel PQ \Rightarrow$ că patrulaterul *MNPQ* este paralelogram.

P3. Fie patrulaterul convex *ABCD* înscris în cercul de centru *O*. Să se demonstreze că, simetricele centrului cercului faţă de laturile patrulaterului sunt vârfurile unui paralelogram.

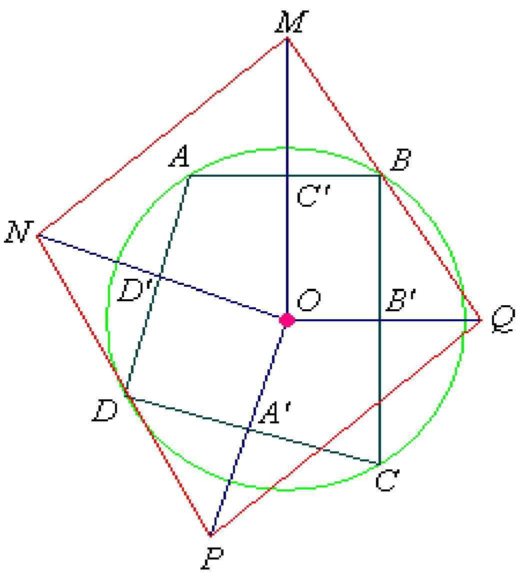

Fig. 18

Demonstraţie

Fie *M*, *N*, *P* şi *Q* simetricele lui *O* faţă de *AB*, *AD*, *DC* şi respectiv *BC*, iar *A'*, *B'*, *C'* şi *D'* mijloacele laturilor *DC*, *BC*, *AB* şi *AD*. Din ΔABD, cu *C'D'* linie mijlocie $\Rightarrow$ $C'D' \parallel BD$, iar din ΔBDC, cu *A'B'* linie mijlocie $\Rightarrow A'B' \parallel BD$ prin urmare, $A'B' \parallel C'D'$.

Asemănător, $C'D' \| MN$ şi $A'B' \| PQ \Rightarrow MN \| PQ$.

Analog, se arată că $NP \| MQ \Rightarrow M, N, P$ şi Q sunt vârfurile unui paralelogram.

Metoda a patra. **Demonstrarea paralelismului a două drepte folosind una dintre teoremele: a) un patrulater convex este paralelogram, dacă laturile opuse sunt congruente; b) un patrulater convex este paralelogram, dacă două laturi opuse sunt congruente şi paralele; c) un patrulater convex este paralelogram, dacă diagonalele sale se înjumătăţesc; d) dacă într-un patrulater convex unghiurile opuse sunt congruente, atunci patrulaterul este un paralelogram**

P1. Pe laturile unui paralelogram ca baze, se construiesc în afară triunghiuri echilaterale. Să se arate că, vârfurile acestor triunghiuri, diferite de vârfurile paralelogramului sunt vârfurile unui paralelogram.

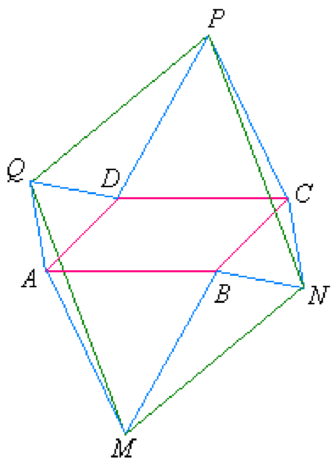

Fig. 19

Demonstraţie

Fie paralelogramul *ABCD* şi fie triunghiurile echilaterale, construite în exterior: ΔABM, ΔBCN, ΔCDP *şi* ΔADQ.

Din congruenţa ΔBMN şi ΔDPQ respectiv ΔAQM şi ΔCNP (cazul de congruenţă: latură, unghi, latură) $\Rightarrow$ $MN=PQ$ şi $MQ=NP$.

Prin urmare, patrulaterul *MNPQ* este paralelogram (laturile opuse sunt congruente).

P2. Într-un paralelogram *ABCD*, bisectoarea unghiului *A* taie latura *CD* în punctul *M*, iar bisectoarea unghiului *C* taie latura *AB* în punctul *N*. Să se arate că, patrulaterele *AMCN* şi *BMDN* sunt paralelograme.

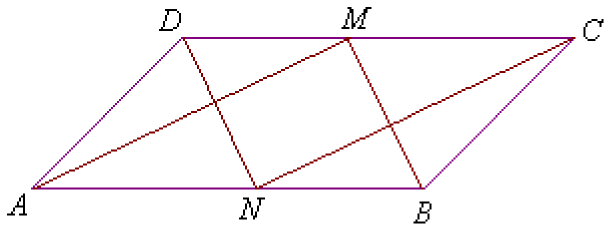

Fig. 20

Demonstraţie

$\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle MCN$ (jumătăţi de unghiuri congruente). Din triunghiurile *ADM* şi *BNC* $\Rightarrow$ $\sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle BNC$ (ţinând scama că patrulaterul *ABCD* este paralelogram şi că *AM* şi *CN* sunt bisectoare ale unghiurilor *BAD* şi *BCD*). Prin urmare, $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle ANC$, ca având acelaşi suplement; cum s-a obţinut că unghiurile opuse sunt congruente, rezultă că patrulaterul *AMCN* este paralelogram. Analog, se arată că patrulaterul *BMDN* este paralelogram.

P3. Medianele *BE* şi *CF* ale ΔABC se intersectează în punctul *G*. Dacă *M* şi *N* sunt mijloacele segmentelor *BG*, respectiv *GC*, să se arate că patrulaterul *FMNE* este un paralelogram.

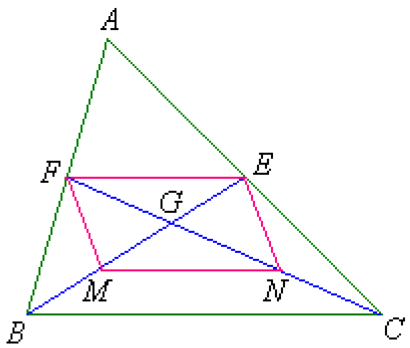

Fig. 21

Demonstraţie

Cum se ştie, punctul de concurenţă al medianelor este situat la $\frac{1}{3}$ de bază şi $\frac{2}{3}$ de vârful triunghiului. Prin urmare, conform ipotezei $\Rightarrow$ $GF = GN$ şi $GM = GE$. Deci, în patrulaterul *FMNE* diagonalele se înjumătăţesc, de unde rezultă că este un paralelogram.

P4. În patrulaterul convex *ABCD*, *E* este mijlocul laturii *AB* şi *F* mijlocul laturii *CD*. Să se demonstreze că, mijloacele segmentelor *AF*, *CE*, *BF* şi *DE* sunt vârfurile unui paralelogram.

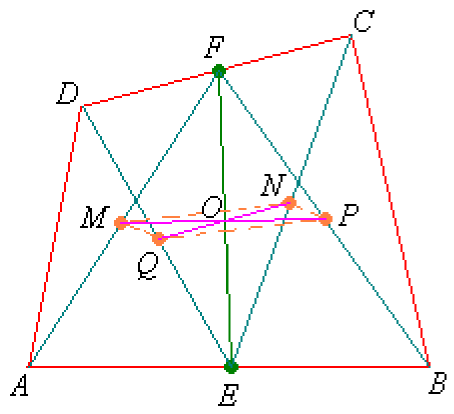

Fig. 22

Demonstraţie

Fie M mijlocul lui AF, N mijlocul lui CE, P mijlocul lui BF, Q mijlocul lui DE şi O mijlocul lui EF.

MP linie mijlocie în $\Delta ABF \Rightarrow MP = \dfrac{AB}{2} = AE = EB$ (1)

MO linie mijlocie în $\Delta AFE \Rightarrow MO = \dfrac{AE}{2}$ (2)

OP linie mijlocie în $\Delta BFE \Rightarrow OP = \dfrac{EB}{2}$ (3)

Din (1), (2) şi (3) $MO=OP$ (punctele M, O şi P sunt coliniare).

Analog, se arată că $QO=ON$ (punctele Q, O şi N sunt coliniare).

Cum în patrulaterul $MNPQ$ diagonalele se înjumătăţesc $\Rightarrow$ acesta este paralelogram.

P5. Într-un patrulater convex $ABCD$, se notează cu M şi N mijloacele laturilor BC, respectiv CD, şi cu P intersecţia dreptelor AM şi BN. Ştiind că $\dfrac{AP}{PM} = 4$ şi $\dfrac{BP}{PN} = \dfrac{2}{3}$, să se demonstreze că $ABCD$ este paralelogram.

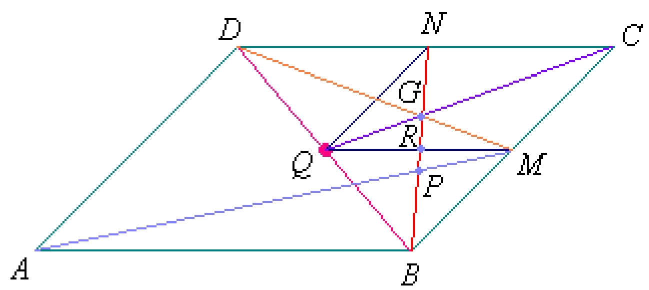

Fig. 23

Demonstraţie

Fie G intersecţia dreptelor BN şi DM $\Rightarrow$ dreapta CG intersectează diagonala BD în mijlocul său. Atunci, QM (fiind linie mijlocie în ΔBCD), este paralelă cu CD. Fie R, intersecţia dreptelor QM şi BN $\Rightarrow$ R este mijlocul lui QM şi al lui BN.

Din $\frac{BP}{PN}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BP}{BN}=\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{BP}{BR}=\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{BP}{PR}=4$ şi din $\frac{AP}{PM}=4 \Rightarrow \frac{AP}{PM}=\frac{BP}{PR}=4$

Din $\frac{AP}{PM}=\frac{BP}{RP}$ şi cum $\sphericalangle APB \equiv \sphericalangle MPR \Rightarrow \Delta APB \sim \Delta MPR \Rightarrow RM \| AB$.

Dar, $RM \| CD$ şi , atunci, $AB \| CD$.

Deoarece $CD=4RM$ şi din $\Delta APB \sim \Delta MPR \Rightarrow AB=4RM \Rightarrow CD=AB$.

Din $AB \| CD$ şi $CD=AB \Rightarrow ABCD$ paralelogram.

***Metoda a cincea.* Demonstrarea paralelismului a două drepte folosind rezultatul că „Dacă două drepte sunt perpendiculare pe o aceeaşi dreaptă, atunci sunt paralele între ele."**

P1. Într-un cerc se consideră o coardă AB, care este latură a pătratului $ABCD$, situat în interiorul cercului. Dreptele BC şi BD intersectează cercul în F, respectiv L. Fie M mijlocul segmentului CF. Să se demonstreze că $LM \| AB$.

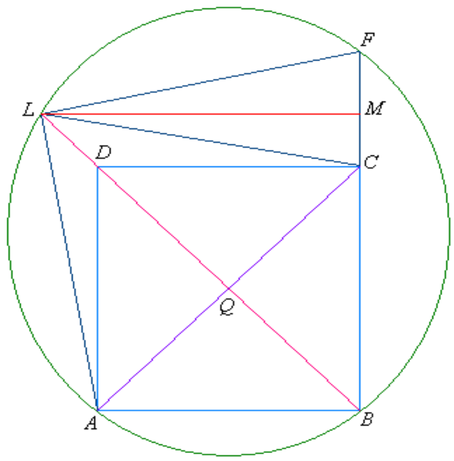

Fig. 24

Demonstraţie

Cum $AB \perp BC$, pentru a arăta că $LM \| AB$ este suficient să se arate că $LM \perp FB$. Deoarece $FM=MC$, aceasta revine la a arăta că ΔLCF este isoscel cu $LC=LF$. Fie Q punctul de intersecţie al diagonalelor pătratului. În ΔALC, LQ este mediană şi înălţime. Prin urmare, $LA=LC$. Cum $\sphericalangle ABL \equiv \sphericalangle LBF \ (=45°)$ $\Rightarrow$ arcAL=arcLF $\Rightarrow LA=LF$. Din $LA=LC$ şi $LA=LF$

$\Rightarrow$ $LC=LF$ $\Rightarrow$ ΔLFC isoscel şi cum LM mediană $\Rightarrow$ $LM \perp FB$, împreună cu relaţia $AB \perp FB$ $\Rightarrow LM \| AB$.

P2. În ΔABC, cu unghiul drept în vârful *A*, se duce înălţimea *AD* şi se consideră un punct *F* pe segmentul *AD*. Perpendiculara în *F* pe *FC* intersectează pe *AB* în *G*. Paralela prin *A* la *FG* intersectează pe *BC* în *H*. Să se arate că, patrulaterul *AGFH* este paralelogram.

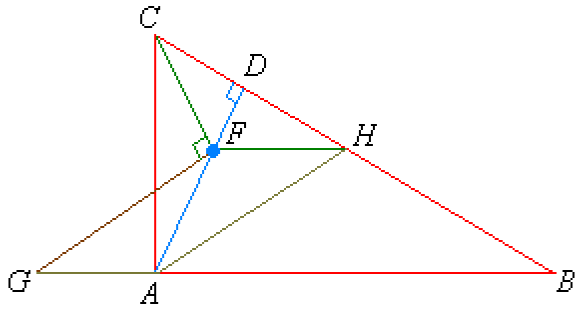

Fig. 25

Demonstraţie

Din ipoteză, $CF \perp AH$ $(GF \| AH)$. În ΔACH, cum $AD \perp CH$ şi $CF \perp AH \Rightarrow HF \perp AC$.

Din $AB \perp AC$ şi $HF \perp AC$ $\Rightarrow HF \| \mathrm{GA}$.

Din $HF \| GA$ şi $AH \| GF$ $\Rightarrow$ patrulaterul *AGFH* este paralelogram.

***Metoda a şasea.* Demonstrarea paralelismului a două drepte folosind „Asemănarea triunghiurilor, care au câte un unghi congruent cuprins între laturi respectiv proporţionale.”**

P1. Fie triunghiul oarecare *ABC*, în care se duce mediana *AA'*. Se consideră un punct oarecare *N*, al medianei *AA'* şi se notează cu *D* şi *E* punctele de intersecţie ale dreptelor *CN* şi *BN* cu laturile *AB*, respectiv *AC*. Să se demonstreze că *DE* este paralelă cu *BC*.

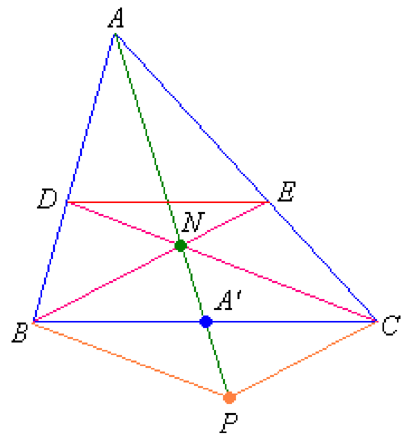

Fig. 26

Demonstraţie

Prin punctele B şi C se duc $BP \parallel DC$ şi $CP \parallel BE$.

Din $\Delta ANE \sim \Delta APC \Rightarrow \dfrac{EN}{PC} = \dfrac{AN}{AP}$ (1)

Din $\Delta ADN \sim \Delta ABP \Rightarrow \dfrac{DN}{BP} = \dfrac{AN}{AP}$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \dfrac{EN}{PC} = \dfrac{DN}{BP}$ şi cum $\sphericalangle BPC \equiv \sphericalangle DNE$ (prin construcţie: unghiuri cu laturile paralele şi de acelaşi fel) $\Rightarrow \Delta DNE \sim \Delta BPC$ şi , având câte două laturi paralele, avem $DE \parallel BC$.

P2. Fie paralelogramul oarecare *ABCD***.** O dreaptă oarecare dusă prin vârful B intersectează laturile DA şi DC în punctele M, respectiv N, însă prin vârful D se duce o a doua dreaptă arbitrară care intersectează pe AB în P şi BC în Q. Să se arate că $NQ \parallel MP$.

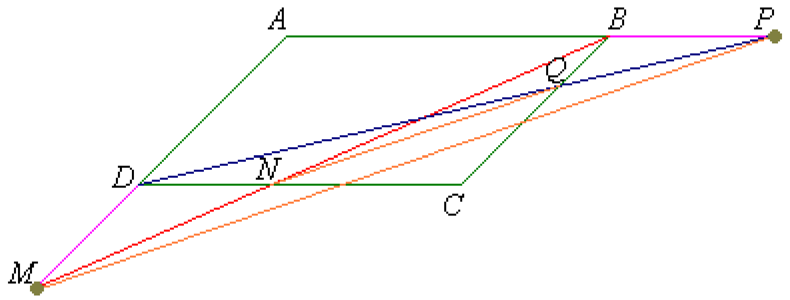

Fig. 27

Demonstraţie

Deoarece $\Delta NCQ \sim \Delta PAM$, pentru că au $CQ \parallel AM$, $NC \parallel AB$ şi $\sphericalangle NCQ \equiv \sphericalangle PAM \Rightarrow$ $NQ \parallel MP$.

***Metoda a şaptea.* Demonstrarea paralelismului a două drepte folosind rezultatul că „Dacă două puncte sunt egal depărtate de două drepte date, paralele între ele, atunci dreapta determinată de cele două puncte este paralelă cu dreptele date.”**

P1. Se dă trapezul $ABCD$, baza mică fiind AB, iar baza mare CD. Bisectoarele unghiurilor A şi D se taie în I_1, iar bisectoarele unghiurilor B şi C se taie în I_2**.** Să se arate că dreapta I_1I_2 este paralelă cu bazele trapezului.

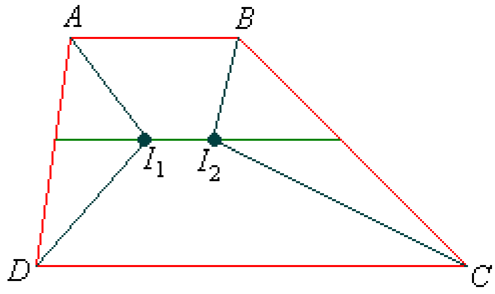

Fig. 28

Demonstraţie

Punctul I_1 este egal depărtat de cele două baze şi de latura AD, fiind intersecţia celor două bisectoare. Analog, pentru punctul I_2. Prin urmare, $I_1I_2 \| AB \| CD$.

II. PARALELISM ÎN SPAŢIU. METODE DE DEMONSTRAŢIE

În geometria planului, relaţia de paralelism priveşte mulţimea dreptelor din plan şi admiţând că o dreaptă este paralelă cu ea însăşi, relaţia de paralelism este o relaţie de echivalenţă. În geometria spaţiului, relaţia de paralelism are o sferă de funcţionalitate mai bogată: aici vorbim despre ***drepte paralele, dreaptă paralelă cu un plan*** (sau ***plan paralel cu o dreaptă), plane paralele.***

Relaţia de paralelism este o relaţie de echivalenţă în mulţimea dreptelor din spaţiu, după cum relaţia de paralelism în mulţimea planelor este o relaţie de echivalenţă (acceptând că orice plan este paralel cu el însuşi), dar sunt false afirmaţiile:

a) ***dacă două drepte sunt paralele cu un plan, atunci ele sunt paralele între ele;***

b) ***dacă două plane sunt paralele cu o dreaptă, atunci ele sunt paralele între ele.***

În consecinţă, dispunem de metode şi tehnici de demonstrare a paralelismului unei drepte cu un plan şi a paralelismului a două plane.

Metoda întâi. **Dreapta *a* este paralelă cu planul α dacă şi numai dacă există o dreaptă *b* conţinută în planul α care este paralelă cu *a*.**

Metoda a doua. (privind paralelismul a două plane) **Planele distincte α şi β sunt paralele dacă şi numai dacă există dreptele *a* şi *a'* distincte şi concurente în planul α şi dreptele *b* şi *b'* distincte şi concurente în planul β astfel încât *a* este paralelă cu *b* şi *a'* este paralelă cu *b'*.**

Metoda a treia. **Dacă o dreaptă *d* este paralelă cu un plan α, atunci orice plan care conţine pe *d* intersectează planul α după o dreaptă *d'* paralelă cu dreapta *d*.**

Metoda a patra. **Dacă o dreaptă este paralelă cu două plane secante, atunci ea este paralelă cu dreapta lor de intersecţie.**

Metoda a cincea. **Dacă planul α este paralel cu dreapta de intersecţie a planelor β şi γ, atunci α intersectează pe β şi γ după drepte paralele.**

Metoda a şasea. **Intersecţiile a două plane paralele cu un al treilea plan sunt drepte paralele.**

Metoda a şaptea. **Două drepte perpendiculare pe un plan sunt paralele între ele.**

Metoda a opta. **Două plane perpendiculare pe aceeaşi dreaptă sunt paralele între ele.**

Probleme care reflectă aceste metode

P1. Fie $[ABCDA'B'C'D']$ un cub. Arătaţi că planele $(A'BD)$ şi $(B'CD')$ sunt paralele.

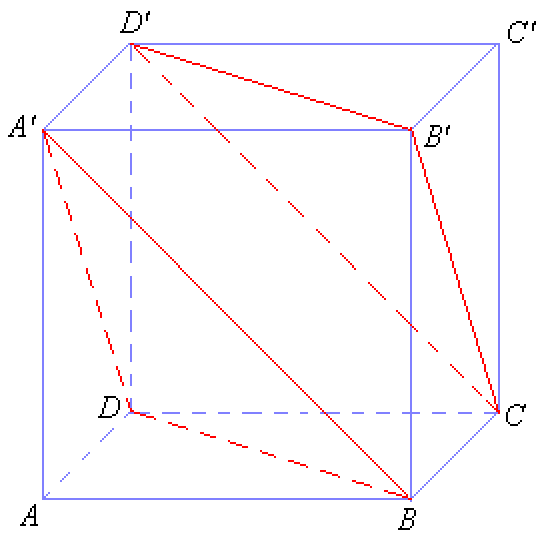

Fig. 29

Demonstraţie

Dreptele *BD* şi *B'D'* sunt paralele, deoarece, cum rezultă din definiţia cubului, patrulaterul *BD*B'D' este un dreptunghi. La fel, dreptele *A'B* şi *D'C* sunt paralele. Afirmaţia rezultă din suficienţa exprimată în metoda a doua.

P2. Fie într-o piramidă oarecare $[SA_1A_2...A_n]$ cu vârful S baza poligonul $[A_1A_2...A_n]$, dreapta care conţine mijloacele a două muchii $[SA_i]$ şi $[SA_j]$ este paralelă cu planul bazei. Arătaţi că mijloacele tuturor muchiilor $[SA_i]$, i = 1, 2,..., n sunt situate într-un plan care este paralel cu planul bazei.

Demonstraţie

Fie M_i şi M_j mijloacele muchiilor $[SA_i]$ şi $[SA_j]$. Atunci $[M_iM_j]$ este linia mijlocie în triunghiul SA_iA_j $\Rightarrow$ dreapta $[M_iM_j]$ este paralelă cu dreapta $[A_iA_j]$. Utilizând suficienţa exprimată în metoda întâi, deducem că $[M_iM_j]$ este paralelă cu planul bazei. Din acest rezultat, folosind rezultatul exprimat în metoda întâi, rezultă că planul $(M_1M_2M_3)$ este paralel cu planul $(A_1A_2A_3)$, adică cu planul bazei. La fel, planul $(M_1M_2M_j)$ pentru fiecare $j=\overline{4,n}$ este paralel cu planul bazei $\Rightarrow$ aceste plane coincid.

P3. Fie tetraedrul *ABCD* oarecare în care *M, N, P* şi *Q* sunt mijloacele muchiilor AD, AB, BC şi CD. Arătaţi că punctele *M, N, P* şi *Q* sunt coplanare şi că planul *(MNPQ)* este paralel cu dreptele *AC* şi *BD.*

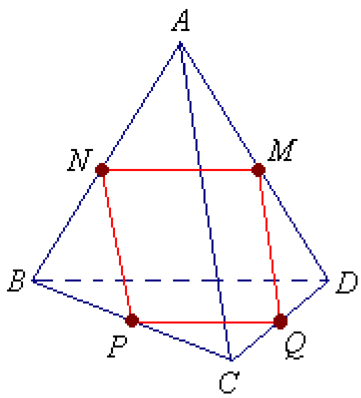

Fig. 30

Demonstraţie

MN este linie mijlocie în ΔABD, deci dreapta $MN \| BD$. PQ este linie mijlocie în ΔBCD, deci $PQ \| BD$ $\Rightarrow$ $MN \| PQ$, ceea ce implică coplanaritatea punctelor *M, N, P* şi *Q*. Deoarece $MN \| BD$ $\Rightarrow$ planul $(MNPQ) \| BD$.

P4. Fie piramida *SABCD* cu vârful *S* şi baza paralelogramul *ABCD* cu centrul *O*. Determinaţi secţiunea realizată în piramidă de planul care conţine mijloacele segmentelor AB, AD şi SO.

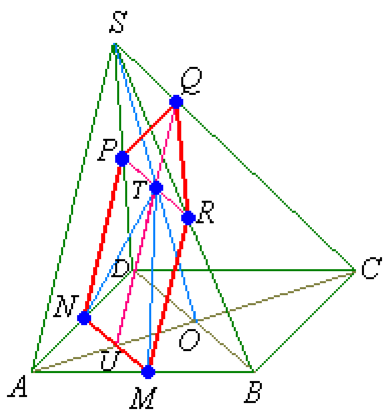

Fig. 31

Demonstraţie

Notăm prin M, N şi T mijloacele segmentelor AB, AD şi SO. Planul $(MNT) \| BD$ deoarece conţine dreapta $MN \| BD$ $\Rightarrow$ (MNT) intersectează planul (SBD) după o dreaptă paralelă cu BD. Această dreaptă trece prin T, deci conţine mijloacele muchiilor SD şi SB şi, fie acestea P şi R.

Fie U mijlocul segmentului MN. Planul (MNT) intersectează planul (SAC) după dreapta TU, care intersectează muchia SC într-un punct Q a cărui poziţie se poate preciza utilizând teorema lui Menelaus:

$$\frac{UO}{UC} \cdot \frac{CQ}{QS} \cdot \frac{ST}{TO} = 1$$

prin condiţia $CQ=3QS$. Aşadar, planul (MNT) secţionează piramida după pentagonul $MNPQR$ ale cărui vârfuri au fost precizate mai sus.

P5. Fie un unghi AOB, cu $(OA) = (OB)$ şi bisectoarea sa $(OC$. Să se arate că proiecţia unghiului AOB, pe un plan paralel cu OC, are bisectoarea O_1C_1 paralelă cu OC unde, O_1 şi C_1 sunt proiecţiile pe plan ale punctelor O şi C.

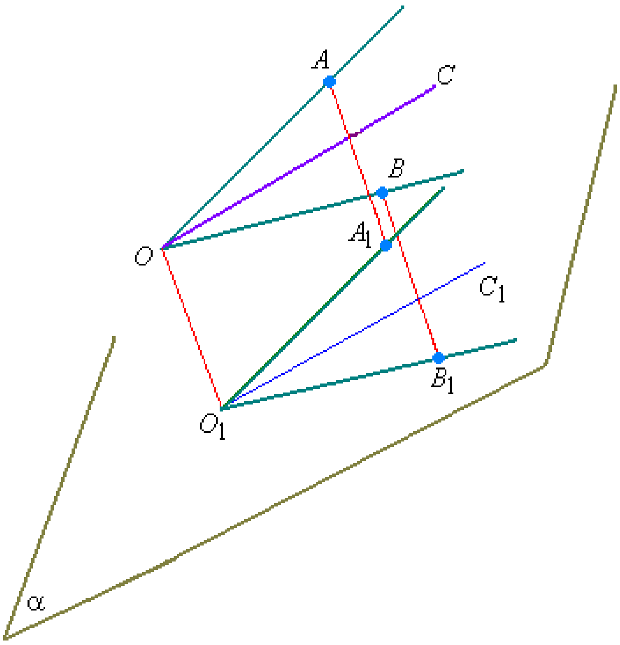

Fig. 32

Demonstraţie

Fie A_1 şi B_1 proiecţiile lui A şi B pe planul α, paralel cu OC. Triunghiul ACB, fiind isoscel $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle OCA) = m(\sphericalangle OCB) = 90°$, $AC = AB$ şi $\sphericalangle OCA$ are latura OC paralelă cu planul $\alpha \Rightarrow \sphericalangle O_1C_1A_1$ este tot unghi drept.

Cum $AC=CB \Rightarrow A_1C_1=C_1B_1$, pentru că $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$.

$\Delta O_1C_1A_1 \equiv \Delta O_1C_1B_1$ (dreptunghice) $\Rightarrow$ $(O_1C_1$ bisectoarea $\sphericalangle A_1O_1B_1$.

P6. În trapezul $ABCD$, AB nu este bază, dar este o coardă în cercul de centru O. Fie E şi F punctele diametral opuse punctelor A şi , respectiv B, iar $M \in (AED) \cap (CFB)$, $M \notin (EFB)$. Să se arate că OM este paralelă cu linia mijlocie a trapezului $ABCD$.

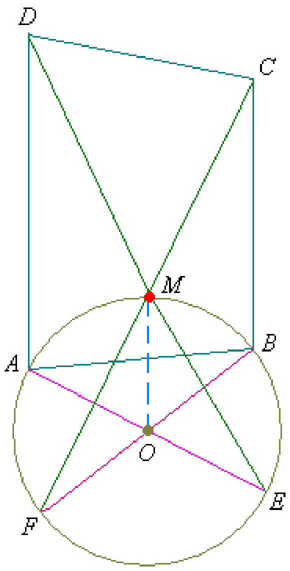

Fig. 33

Demonstrație

În trapezul *ABCD*, $BC \parallel AD$; în centru O, $AE \cap BF = \{O\}$, $AE \subset (ADE)$, $BF \subset (BCF)$ $\Rightarrow$ $O \in (ADE) \cap (BCF)$ şi din ipoteză $M \in (ADE) \cap (BCF)$, iar $AD \subset (ADE)$ şi $BC \subset (BCF)$. Deci, cele două plane (ADE) şi (BCF) au punctele comune O şi M $\Rightarrow$ $(ADE) \cap (BCF) = OM$.

Prin urmare, cele două plane concurente după *OM* conțin dreptele *AD* şi *BC* paralele $\Rightarrow$ $OM \parallel AD \parallel BC$. Dar, din trapez linia mijlocie este paralelă cu bazele trapezului şi , atunci, *OM* este şi ea paralelă cu linia mijlocie a trapezului.

P7. Se dau trei plane paralele α, β, γ şi punctele *A* şi *B* în planul α, iar *C* şi *D* în planul β. Dreptele *AC*, *BC*, *BD*, *AD* taie planul γ în punctele *E*, *F*, *G* şi *H*. Să se arate că patrulaterul *EFGH* este un paralelogram.

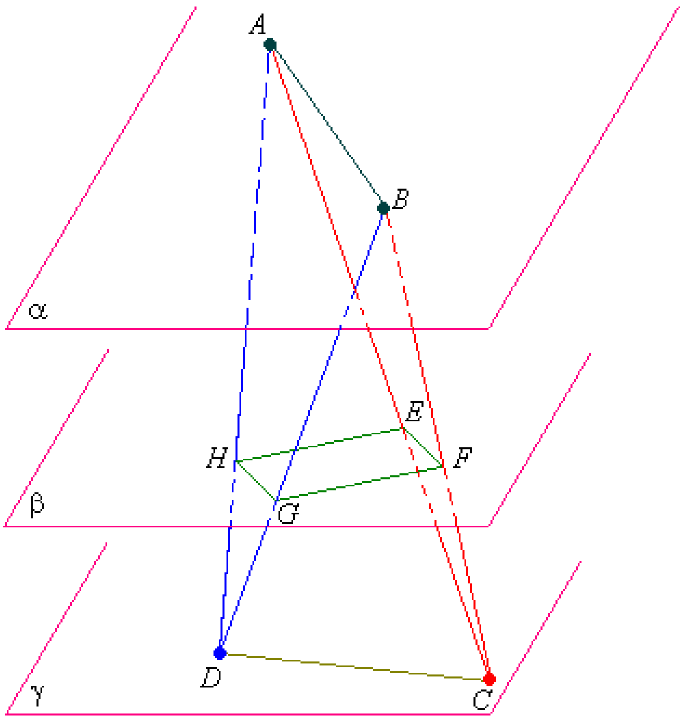

Fig. 34

Demonstrație

Din ipoteză, $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$, $AB \subset \alpha$, $C \in \beta$, $D \in \beta \Rightarrow$ $(CAB) \cap \gamma = EF \parallel AB$, $(DAB) \cap \gamma = GH \parallel AB \Rightarrow EF \parallel GH$, (1)

Din, $(ADC) \cap \gamma = HE \parallel DC$ şi $(BDC) \cap \gamma = GF \parallel DC \Rightarrow HE \parallel DC$, (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ patrulaterul *EFGH* paralelogram.

P8. Fie *A, A'; B, B'; C, C'* trei perechi de puncte situate, respectiv pe dreptele paralele *a, b, c* astfel încât segmentele *AA', BB'* şi *CC'* să aibă acelaşi sens şi *G, G '* - centrele de greutate ale triunghiurilor, *ABC* şi *A'B'C'*. Să se demonstreze că segmentul *GG'* este paralel cu segmentele *AA', BB'* şi *CC'* şi egal cu media lor aritmetică.

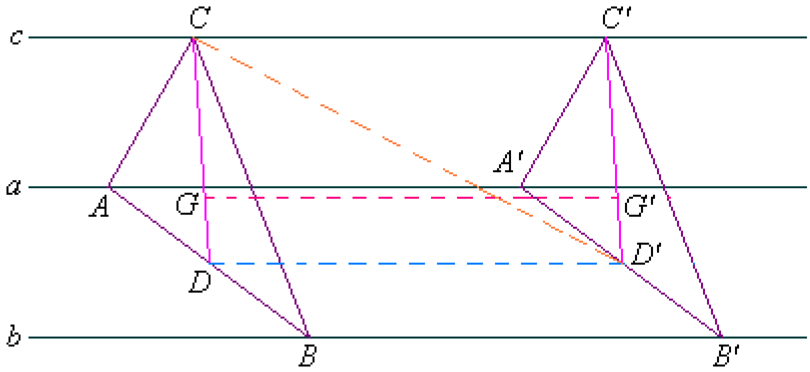

Fig. 35

Demonstraţie

Fie *D* şi *D'* mijloacele segmentelor *AB, A'B'*. *G* şi *G'* vor fi situate pe *CD* şi *C'D'* a. î. $\frac{GC}{GD}=\frac{G'C'}{G'D'}=2$.

În trapezul *AA'B'B, DD'* este linie mijlocie $\Rightarrow$ $DD' \| CC'$, $DD'=\frac{AA'+BB'}{2}$. Cum $DD' \| CC'$ şi punctele *G* şi *G'* împart segmentele *CD* şi *C'D'* în acelaşi raport $\Rightarrow$ $GG' \| CC'$.

Fie *I* punctul de intersecţie al diagonalei *CD'* a trapezului *CC'DD'* cu *GG'*.

Avem $GI=\frac{2}{3}DD'$, $IG'=\frac{1}{3}CC' \Rightarrow GC=GI+IG'=\frac{2}{3}DD'+\frac{1}{3}CC'=$

$$=\frac{2}{3}\frac{AA'+BB'}{2}+\frac{1}{3}CC'=\frac{AA'+BB'+CC'}{3}.$$

P9. Se dau paralelogramele *ABB'A'* şi *BB'CC'* care sunt incluse în plane diferite şi *P* mijlocul segmentului *AB*.

a) Să se arate că $AC' \| (PCB')$.

b) Notăm cu *O* centrul lui *BCC'B'* şi cu O_1 mijlocul segmentului *A'C*. Să se arate că dreapta OO_1 este paralelă cu dreapta de intersecţie a planelor (A'B'C) şi (*ABC*).

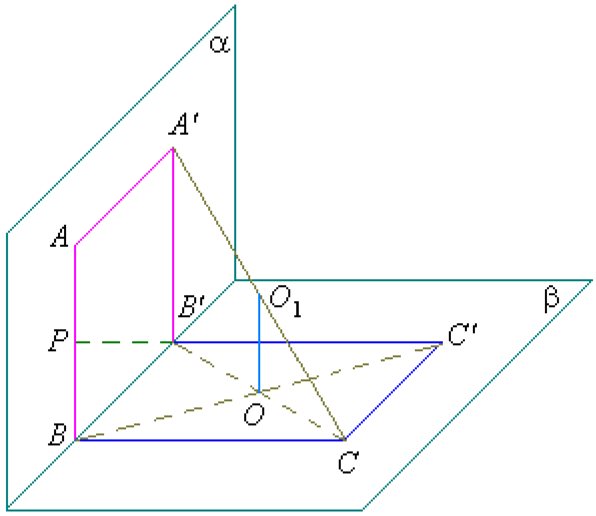

Fig. 36

Demonstraţie

a) Fie P mijlocul lui AB. În triunghiul ABC', PO este linie mijlocie $\Rightarrow PO \| AC'$.

Dar $PO \subset (PCB') \Rightarrow AC' \| (PCB')$.

b) În triunghiul $CA'B'$, OO_1 este linie mijlocie $\Rightarrow OO_1 \| A'B'$. Dar $A'B' \| AB$, $AB \subset (ABC) \Rightarrow OO_1 \| AB \subset (ABC)$, rezultă $OO_1 \| (ABC)$.

Însă, prin dreapta OO_1 trece planul $(CA'B')$, care intersectează planul (ABC) şi, cum $OO_1 \| (ABC) \Rightarrow OO_1 \| \left[(ABC) \cap (CA'B')\right]$ (dacă două plane diferite au un punct comun, atunci intersecţia lor este o dreaptă).

P10. Două plane α şi β se intersectează după o dreaptă d şi A, B şi C sunt trei puncte situate câte unul, respectiv în planele α şi β şi pe dreapta d. Din C se ridică pe d perpendicularele d_1, d_2 conţinute, respectiv în planele α şi β şi fie $A'B'$, respectiv simetricele punctelor A şi B faţă de d_1 şi d_2. Să se arate că dreptele AA' şi BB' sunt paralele şi trapezul $ABB'A'$ este isoscel.

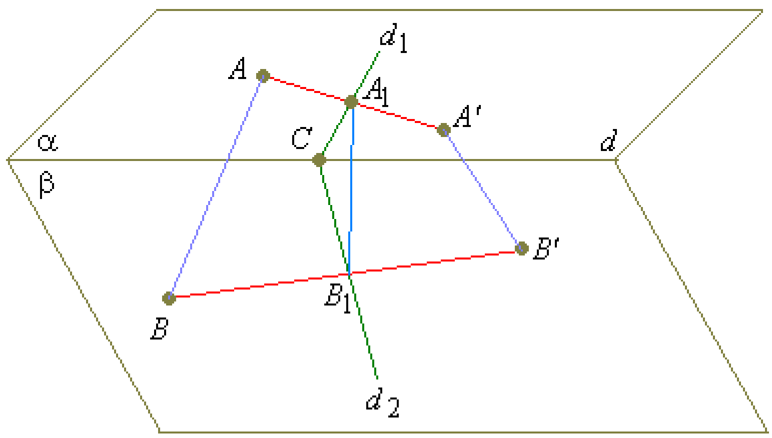

Fig. 37

Demonstrație

Prin construcție, avem $AA' \perp d_1$ și $d \perp d_1$ în planul α $\Rightarrow AA' \| d$. Analog, $BB' \| d$ $\Rightarrow$ $AA' \| BB'$.

Fie $\{A_1\} = A'A \cap d_1$, $\{B_1\} = B'B \cap d_2$.

Avem $[AA_1] \equiv [A_1A']$, $[BB_1] \equiv [B_1B']$. Pe de altă parte, $d \perp (A_1B_1C) \Rightarrow$ $d \perp A_1B_1$ $\Rightarrow$ $AA' \perp A_1B_1$ $\Rightarrow$ A_1B_1 este axă de simetrie a trapezului care, este astfel isoscel.

P11. Fie planele α și β, $\alpha \| \beta$, $A, B \in \alpha$, iar CD o dreaptă paralelă cu α și β. Dreptele CA, CB, DB și DA taie planul β, respectiv în M, N, P și Q. Să se arate că aceste puncte sunt vârfurile unui paralelogram.

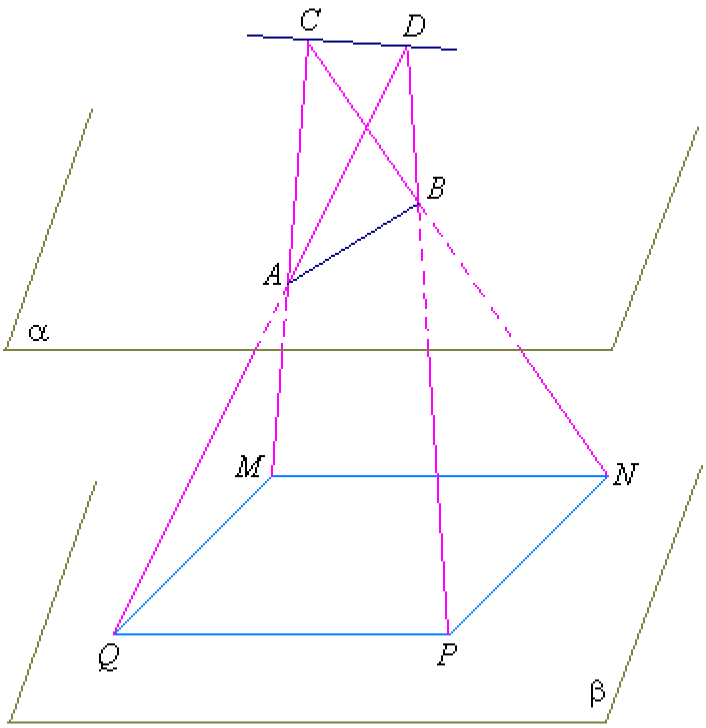

Fig. 38

Demonstrație

Din $\alpha \| \beta$ și $\alpha \cap (ABC) = AB$, $\beta \cap (ABC) = MN$ $\Rightarrow AB \| MN$.

Din $\alpha \| \beta$ și $\alpha \cap (ABD) = AB$, $\beta \cap (ABD) = PQ$ $\Rightarrow AB \| PQ$.

Din $AB \| MN$ și $AB \| PQ \Rightarrow MN \| PQ$ (1)

Din $CD \| \alpha \| MN$, $CD \subset (ACD)$ și $(ACD) \cap \beta = MQ$ $\Rightarrow CD \| MQ$

Din $CD \| \beta$, $DC \subset (BCD)$ și $(BCD) \cap \beta = NP$ $\Rightarrow CD \| NP$

Din $CD \| MQ$ și $CD \| NP \Rightarrow MQ \| NP$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $MNPQ$ paralelogram.

P12. Se duce un plan β printr-o dreaptă d paralelă cu un plan α. Să se arate că intersecţia planelor α şi β este o dreaptă paralelă cu dreapta d.

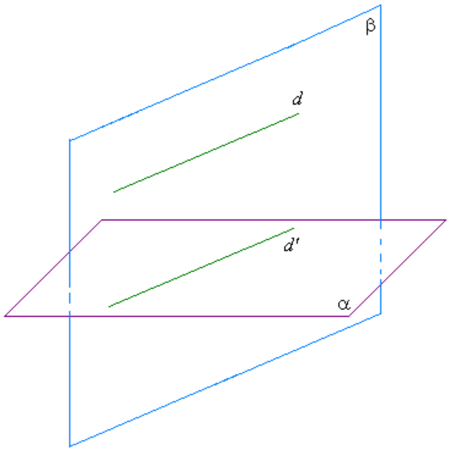

Fig. 39

Demonstraţie

Demonstrăm prin reducere la absurd că există o dreaptă *d'*, dreapta de intersecţie dintre planele α şi β şi să presupunem că $d \cap d' = \{M\}$. Acest punct, fiind pe *d'*, va fi situat şi în planul α $\Rightarrow$ dreapta *d* ar avea un punct comun cu planul α, ceea ce contrazice ipoteza, deoarece am presupus că dreapta *d* este paralelă cu planul α.

P13. Prin muchia *CD* a tetraedrului oarecare *ABCD* se duce planul α, paralel cu muchia opusă *AB*, iar prin muchia *BD* se duce planul β, paralel cu muchia opusă *AC*. Să se arate că dreapta ce uneşte mijlocul *M* al muchiei *BC* cu mijlocul *N* al muchiei *AD* este paralelă cu planele α şi β.

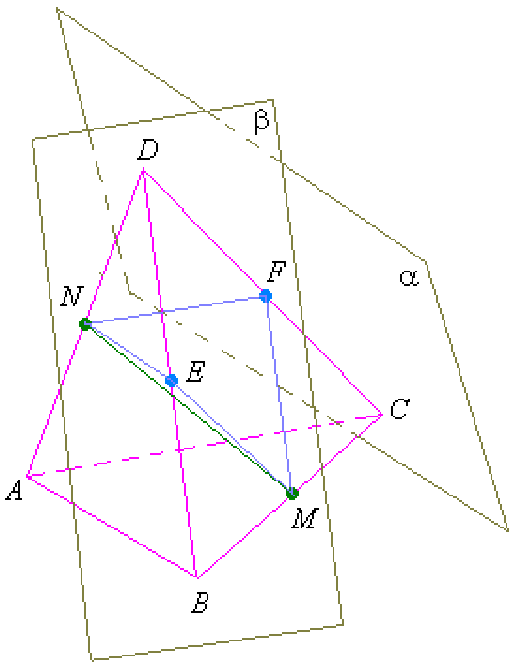

Fig. 40

Demonstraţie

Fie E mijlocul lui BD şi F mijlocul lui CD. Cum ME şi NE sunt linii mijlocii în triunghiurile BCD, respectiv ABD $\Rightarrow$ $ME \| CD$ şi $NE \| AB$ $\Rightarrow$ $ME \| \alpha$ şi $NE \| \alpha$ Prin urmare, planul $(MNE) \| \alpha$ $\Rightarrow$ $MN \| \alpha$.

Analog, se obţine că $(MNF) \| \beta \Rightarrow MN \| \beta$.

P14. Se dau punctele necoplanare A, B, C şi D. Fie M, N, P şi Q situate în planul (ABC), astfel încât M este mijlocul lui AC, N este mijlocul lui BM, P este mijlocul lui NC şi Q este mijlocul lui BP. Să se demonstreze că punctele A, N, Q şi D sunt coplanare şi că MP este paralelă cu acest plan.

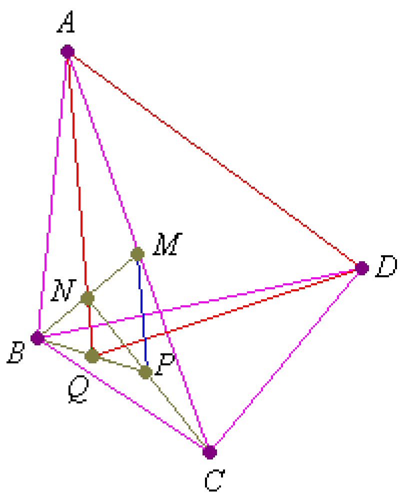

Fig. 41

Demonstraţie

În ΔANC, MP este linie mijlocie $\Rightarrow$ $MN \| AN$. În ΔBMP, NQ este linie mijlocie $\Rightarrow$ $MP \| NQ$. Din $MP \| AN$ şi $MP \| NQ$ $\Rightarrow$ punctele A, N şi Q sunt coliniare $\Rightarrow$ A, N, Q, D sunt coplanare (situate în planul (AND)).

Cum $MP \| AN$ şi $AN \subset (AND) \Rightarrow MP \| (AND)$.

P15. Triunghiurile ABC şi ABD au numai vârful A într-un plan α, iar BC şi BD paralele cu α.

a) Să se arate că $DC \| \alpha$, dacă A, B, C şi D nu sunt coplanare;

b) Dacă $M \notin \alpha$, iar dreptele MD şi MC intersectează pe α în D' şi C', avem DC paralelă cu $D'C'$.

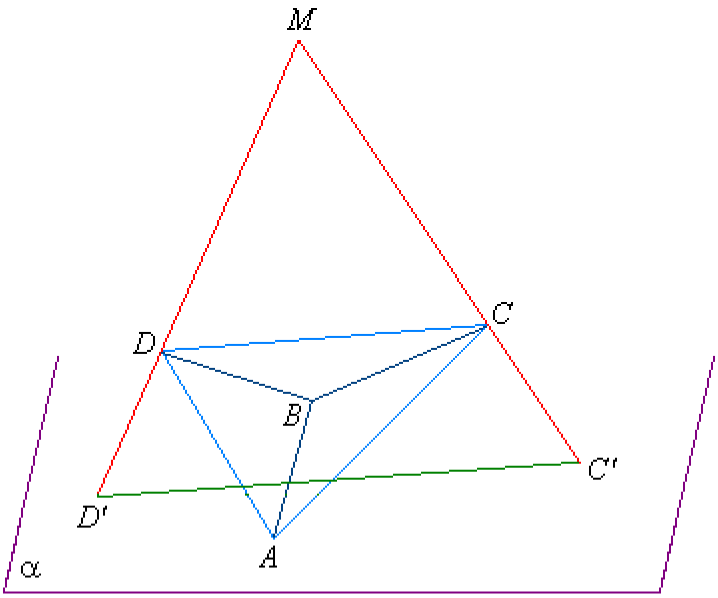

Fig. 42

Demonstraţie

a) Din $DB \| \alpha$ şi $BC \| \alpha \Rightarrow (DBC) \| \alpha$.

Dar, planul *(ADC)* intersectează planele α şi *(DBC)* după două drepte paralele, una din acestea fiind *DC* $\Rightarrow$ dreapta *DC* fiind paralelă cu o dreaptă conţinută în α (trece prin *A*) $\Rightarrow$ $DC \| \alpha$.

b) Din a) avem $(DBC) \| \alpha$, iar $(DD'C') \cap \alpha = D'C'$ şi $(D'C'D) \cap (DBC) = \{DC\}$

$\Rightarrow DC \| D'C'$.

P16. În cubul *ABCDA'B'CD'*, de muchie *a*, se notează cu *M* şi *N* mijloacele muchiilor *AB*, respectiv *AD*, iar cu *E* şi *F* mijloacele muchiilor *B'C'*, respectiv *C'D'*. Să se demonstreze că planele *(A'MN)* şi *(CEF)* sunt paralele.

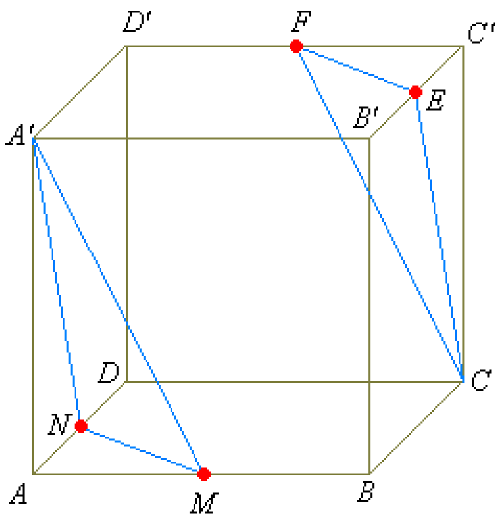

Fig. 43

Demonstraţie

Din $MB \| D'F$ şi $[MB] \equiv [D'F]$ $\Rightarrow$ patrulaterul *MBFD'* este paralelogram.

Din $AN \| EC'$ şi $[AN] \equiv [C'E]$ $\Rightarrow$ patrulaterul *ANC'E* este paralelogram $\Rightarrow$ dreptele *MF* şi *NE* trec prin mijloacele diagonalelor cubului, *BD'* şi *AC'*, adică prin punctul notat cu *O*, care este centrul cubului. Patrulaterul *MNFE* este paralelogram, pentru că diagonalele sale se înjumătăţesc $\Rightarrow$ $MN \parallel EF$. Analog, se arată că patrulaterul *CEA'N* este paralelogram $\Rightarrow$ $EC \| A'N$. Din $MN \| EF$ şi $EC \| A'N$ $\Rightarrow$ $(MNA') \| (CEF)$.

P17. Fie triunghiul *ABC*, iar *AA'*, *BB'* şi *CC'* segmente congruente incluse în drepte paralele, astfel încât *A'*, *B'* şi C' sunt de aceeaşi parte a planului *(ABC)*. Să se arate că:

a) $(ABC) \| (A'B'C')$;

b) dreapta în care este inclusă mediana din *C* a triunghiului *ABC* este paralelă cu *(A'B'C')*.

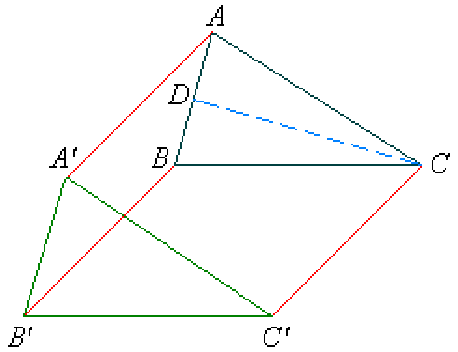

Fig. 44

Demonstraţie

a) Din $AA' \| BB'$ şi $AA'=BB' \Rightarrow$ $AA'B'B$ paralelogram $\Rightarrow$ $A'B' \| AB$.

Din $BB' \| CC'$ şi $BB'=CC' \Rightarrow$ $BB'C'C$ paralelogram $\Rightarrow$ $B'C' \| BC$.

Din $A'B' \| AB$ şi $B'C' \| BC$ $\Rightarrow$ $(A'B'C') \parallel (ABC)$.

b) Mediana *CD* este inclusă în ΔABC, iar $(A'B'C') \| (ABC)$ $\Rightarrow$ $CD \| (A'B'C')$.

P18. Se dau triunghiurile *ACD* şi *BDC* incluse în plane diferite, unde *CD* este inclusă într-un plan α, diferit de precedentele, iar $AB \parallel \alpha$. Dacă *M* şi *N* sunt mijloacele segmentelor *BC* şi *AD*, să se arate că $MN \parallel \alpha$.

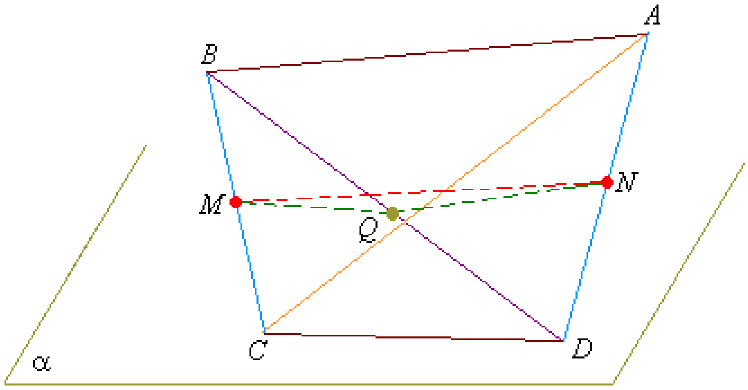

Fig. 45

Demonstrație

Fie Q mijlocul lui BD în ΔBCD, MQ este linie mijlocie $\Rightarrow$ $MQ \parallel CD$, $CD \subset \alpha$ $\Rightarrow$ $MQ \parallel \alpha$. În ΔABD, NQ linie mijlocie $\Rightarrow$ $NQ \parallel AB$.

Dar, $AB \parallel CD \Rightarrow QN \parallel CD$, $CD \subset \alpha$ $\Rightarrow$ $NQ \parallel \alpha$.

Din $MQ \parallel \alpha$ și $NQ \parallel \alpha$ $\Rightarrow$ $(MNQ) \parallel \alpha$ și cum $MN \subset (MNQ)$ $\Rightarrow$ $MN \parallel \alpha$.

P19. Fie A, B, C și D patru puncte necoplanare și E, F, G și H mijloacele segmentelor AB, BC, CD și DA. Să se arate că $EF \parallel (ACD)$ și punctele E, F, G și H sunt coplanare.

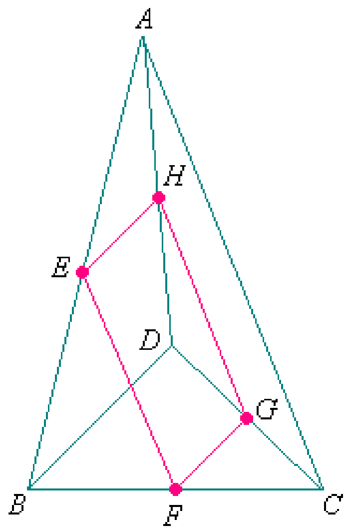

Fig. 46

Demonstrație

În ΔABC, EF este linie mijlocie $\Rightarrow$ $EF \parallel AC$, $AC \subset (ACD) \Rightarrow EF \parallel (ACD)$.

În ΔADC, HG este linie mijlocie $\Rightarrow$ $HG \parallel AC$, $AC \subset (ACD)$.

Din $EF \parallel AC$ și $HG \parallel AC$ $\Rightarrow$ $EF \parallel HG$ $\Rightarrow$ punctele E, F, G și H determină un plan deci, sunt puncte coplanare.

P20. Dacă un plan α intersectează planele β și γ secante după drepte paralele, atunci planul α este paralel cu dreapta de intersecție a planelor β și γ.

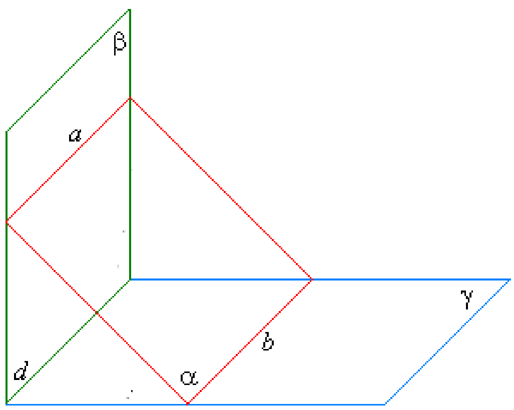

Fig. 47

Demonstrație

Fie $d=\beta\cap\gamma$, $a=\alpha\cap\beta$, $b=\alpha\cap\gamma$, $a\,||\,b$. Din $a\,||\,b$ şi $b\subset\gamma$ $\Rightarrow a\,||\,\gamma$ sau $a\subset\gamma$.

Dar, $a\subset\gamma$ nu este posibil, pentru că altfel ar rezulta că $a=\beta\cap\gamma$, ceea ce contrazice că $d=\beta\cap\gamma$ $\Rightarrow a\,||\,\gamma$ şi $a\subset\beta$ $\Rightarrow$ $\beta\cap\gamma=d\,||\,a$ şi cum $a\subset\gamma$ $\Rightarrow \alpha\,||\,d=\beta\cap\gamma$.

P21. Fie *V, A, B* şi *C* puncte necoplanare, iar punctele G_1 şi G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor *VAB* şi *CVB*. Să se arate că $G_1G_2\,||\,(ABC)$.

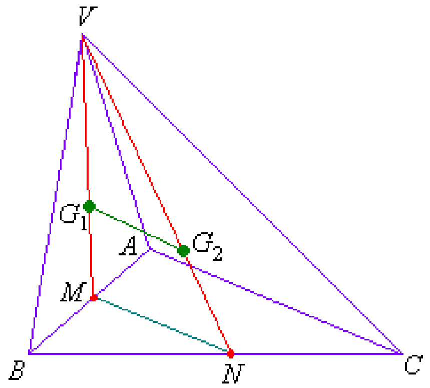

Fig. 48

Demonstrație

Fie *M* mijlocul lui *AB* şi *N* mijlocul lui *BC*.

În triunghiul *VAB*, *VM* mediană şi $G_1\in VM \Rightarrow \dfrac{VG_1}{G_1M}=2$ (1)

În $\Delta\, VBC$, *VN* mediană şi $G_2\in VN \Rightarrow \dfrac{VG_2}{G_2N}=2$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow \dfrac{VG_1}{G_1M}=\dfrac{VG_2}{G_2N}=2\Rightarrow G_1G_2\,||\,MN$ (conform reciprocei th. lui Thales).

Dar, în ΔABC, *MN* este linie mijlocie $\Rightarrow MN\,||\,AC$, $AC\subset(ABC)$.

Din $G_1G_2\,||\,MN, MN\,||\,AC, AC\subset(ABC)\Rightarrow G_1G_2\,||\,AC, AC\subset(ABC)\Rightarrow G_1G_2\,||\,(ABC)$.

P22. Fie *A, B, C* şi *D* puncte necoplanare. Notăm cu *E* şi *F* proiecțiile punctului *A* pe bisectoarea unghiurilor *ABD* şi *ACD*. Să se arate că *EF* este paralelă cu planul (*ABC*).

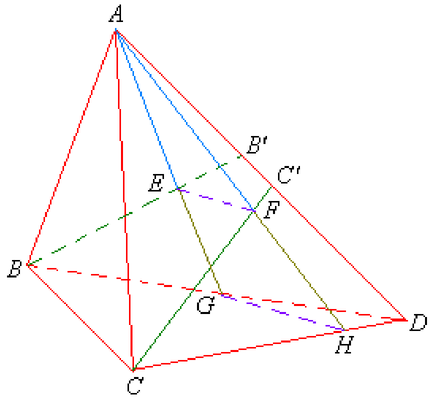

Fig. 49

Demonstraţie

Fie $(BB'$ şi $(CC'$ bisectoarele unghiurilor ABD şi ACD. Notăm $AE \cap BD = \{G\}$ şi $AF \cap CD = \{H\}$. În ΔABG, $(BE$ este bisectoare şi înălţime $\Rightarrow \Delta ABG$ este isoscel, cu baza AG $\Rightarrow$ $AB = BG$. Analog, $AC = CH$. Utilizând teorema bisectoarei în ΔABG şi ΔACH $\Rightarrow \frac{EA}{EG} = \frac{AB}{BG} = 1$, respectiv, $\frac{FA}{FH} = \frac{AC}{CH} = 1$ obţinem $\frac{EA}{EG} = \frac{FA}{FH}$ $\Rightarrow EF \parallel GH$. Cum $GH \subset (BCD)$ $\Rightarrow EF \parallel (BCD)$.

P24. Triunghiurile ABC şi ACD sunt incluse în plane diferite, iar G_1, G_2 şi G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, BCD şi ACD. Să se arate că $(G_1G_2G_3) \parallel (ABD)$.

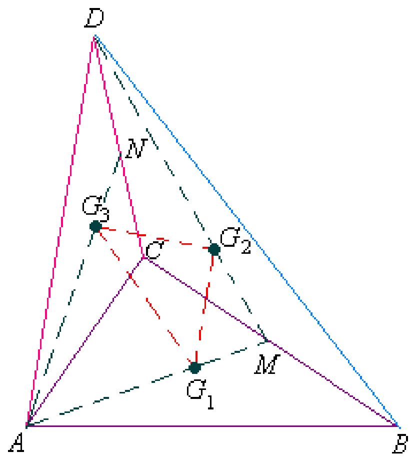

Fig. 50

Demonstraţie

Fie M mijlocul lui BC, $G_1 \in AM, G_2 \in DM$ $\Rightarrow$ $\frac{G_1M}{AM} = \frac{1}{3}$ şi $\frac{G_2M}{DM} = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$

$$\frac{G_1M}{AM} = \frac{G_2M}{DM} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AD$$

Fie N mijlocul lui CD, $G_3 \in AN \Rightarrow \frac{G_3N}{AN} = \frac{1}{3}$.

Din $\frac{G_1M}{AM} = \frac{1}{3}$ şi $\frac{G_3N}{AN} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{G_1M}{AM} = \frac{G_3N}{AN} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_3 \parallel MN \parallel BD$.

Din $G_1G_2 \parallel AD$ şi $G_1G_3 \parallel BD$ $\Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (ABD)$.